Szent István Egyetem

SZEMCSÉS ANYAGOK TERMÉSZETES BOLTOZÓDÁSA

Doktori (Ph.D.) értekezés

Keppler István

Gödöllő
2006.

A doktori iskola	
megnevezése:	**Műszaki Tudományi Doktori Iskola**
tudományága:	**Agrárműszaki Tudomány**
vezetője:	**Dr. Szendrő Péter** egyetemi tanár, az MTA doktora Szent István Egyetem, Gépészmérnöki Kar Mechanikai és Géptani Intézet Gödöllő
Témavezető:	**Dr. M. Csizmadia Béla** egyetemi tanár, a műszaki tudomány kandidátusa Szent István Egyetem, Gépészmérnöki Kar Mechanikai és Géptani Intézet Gödöllő

....

Az iskolavezető jóváhagyása A témavezető jóváhagyása

Tartalom

Ábrák jegyzéke

JELÖLÉSEK

a – állandó

A – állandó

$\boldsymbol{A}$ – alakváltozási tenzor

A_I – alakváltozási tenzor első skalár-invariánsa

b – állandó

B – siló szélessége

c – kohézió

C – konstans

c_0 – a siló oldalfalának merevsége

$\boldsymbol{C}$ – rugalmas együtthatók tenzora

d – állandó

D_k – kritikus nyílásméret

E – rugalmassági modulus

e – állandó

F – állandó

F_F – folyási függvény

f_f – folyási faktor

F_I – feszültségi tenzor első skalárin-variánsa

F_K – kéttengelyű feszültségállapotban az anyagmintára felvihető maximális terhelő erő

$F_{\max}$ – háromtengelyű feszültségállapothoz tartozó maximális terhelő erő

$\boldsymbol{F}$ – feszültségi tenzor

G – csúsztató rugalmassági modulus

$\mathbf{g}$ – nehézségi gyorsulás

H – a siló magassága

h – a garat magassága

K – Janssen konstans

K_0 – nyugalmi talajnyomás tényező

K_1 – konstans Janssen modelljében

m – konstans σ_y számításához, téglatest alakú silóra $m = 1$, hengeres silóra $m = 2$

$\mathbf{n}$ – felületelem normálvektora

N – konstans Jenike modelljében

$\mathbf{p}_0$ – felületelemre ható külső erő

q – állandó

$\mathbf{q}$ – kontinuumelemre ható térfogati erő

r – távolság a garat csúcsától

R – távolság a garat csúcsától a garat tetőpontjáig

s – a siló oldalfala mentén mért távolság

T – a szemcsés anyaggal kitöltött tartomány

u – fajlagos alakváltozási energia

u_K – kritikus energiasűrűség

$\mathbf{u}$ – elmozdulásvektor

X – konstans Enstad modelljében

X_b – konstans Enstad modelljében

Y – konstans Enstad modelljében

Y_b – konstans Enstad modelljében

α – garat félkúpszöge

α_K – kritikus félkúpszög

γ – fajsúly $\gamma = \rho g$

ζ – a boltozat középvonala és a garat falának normálvektora által közrezárt szög

κ – konstans K számításához, aktív állapotban $\kappa = 1$, passzív állapotban $\kappa = 2$

λ – konstans, K számításához

μ – silófal és szemcsehalmaz közötti súrlódási együttható

ν – Poisson tényező

ρ – sűrűség

τ_{nm} – csúsztatófeszültség az $\mathbf{n}$ normálvektorú felületelemen, $\mathbf{m}$ irányban

σ_1 – legnagyobb főfeszültség

$\sigma_{1,a}$ – legnagyobb főfeszültség a garat fala mellett

σ_3 – legkisebb főfeszültség

σ_K – kéttengelyű feszültségállapothoz tartozó tönkremeneteli határfeszültség

$\sigma_{+\min}$ – az összetömörített anyag által szakadás nélkül elviselt húzófeszültség értéke

σ_n – $\mathbf{n}$ irányú normálfeszültség

σ_t – σ_K meghatározása során alkalmazott előtömörítő feszültség

ϕ – belső súrlódási szög

ϕ_w – silófal–szemcsehalmaz közötti súrlódási félkúpszög

Φ – feszültségfüggvény

ω – konstans

BEVEZETÉS

A mezőgazdaság, az élelmiszeripar, a gyógyszeripar, valamint az építészet területén dolgozó mérnökök gyakran találkoznak a szemcsés anyaghalmazok különleges mechanikai tulajdonságaiból eredő problémákkal.

Szemcsés anyaghalmazok bizonyos körülmények között szilárd anyagokhoz hasonlóan viselkednek. Teherviselésre képesek, megőrzik alakjukat. Más körülmények között ugyanaz a szemcsehalmaz, amely korábban szilárd testként volt modellezhető, folyadékhoz hasonló tulajdonságokat mutat. Silóban tárolhatjuk, amelyből gravitációs ürítéssel eltávolíthatjuk. Bizonyos feltételek teljesülése esetén ugyanez a halmaz ismét szilárd testként kezd viselkedni, képessé válik a felette lévő anyagtömeg súlyából adódó terhelések elviselésére, a tárolóból történő kiáramlása megszűnik, mivel a nyílás felett boltozat jön létre.

A műszaki élet sok területén felvetődő jelentős probléma a szemcsés halmazok természetes boltozódása.

1. definíció. *Természetes boltozódásnak* nevezi a szakirodalom azt a jelenséget, amely során a szemcsés halmazban a terhelések hatására kialakul egy anyagréteg, amely képes a felette lévő anyagtömeg súlyából eredő terhelések elviselésére.

Dolgozatomban megmutatom, hogy a természetes boltozódás jelenségét helyesebb a teljes szemcsehalmazra vonatkozó egyensúlyi állapotként kezelnünk, ezért a későbbiekben megadom a természetes boltozódás egy új definícióját.

Bizonyos esetekben a szerkezeteket úgy kell kialakítani, hogy a boltozat ne jöjjön létre. A természetes boltozat megjelenése ugyanis egyrészt akadályozza a szemcsés anyaghalmazok áramlását (pl. a tároló kiürítését), másrészt a boltozatok megjelenése jelentős mértékben módosítja a halmazbeli feszültségviszonyokat. A feszültségviszonyok módosulása pedig a tároló falának többletterhelését, esetleg a tároló károsodását, tönkremenetelét okozhatja.

Más esetekben a kialakuló természetes boltozat teherhordó szerkezetként vehető figyelembe, azaz itt a viszonyokat úgy célszerű kialakítani, hogy a boltozat létrejöjjön. Ilyen esetekkel a bányászatban valamint föld alatti építmények (alagutak, csővezetékek) terhelésviszonyainak vizsgálata során találkozhatunk.

A szemcsés anyagok mechanikájának területén végzett elméleti vizsgálatok olyan erőteljes közelítéseket és elhanyagolásokat hordoznak magukban, hogy az ezekből származó becslések és a mérési eredmények között jelentős az eltérés[1].

Jelen munka célja a szemcsés anyaghalmazok természetes boltozódásának olyan új modelljét létrehozni, amelynek felhasználásával a jelenséggel kapcsolatos előrejelzéseink, becsléseink a mérésekkel meghatározható értékekhez közelebb álló eredményekre vezetnek. Ennek elérése érdekében:

I. Dolgozatomban bemutatom a szemcsés halmazok kontinuum modelljében felhasznált anyag- és tönkremeneteli jellemzőket.

II. Összefoglalom a szemcsés halmazokban kialakuló feszültségviszonyok, valamint a természetes boltozódás jelenségének modellezésével kapcsolatos eddigi eredményeket.

III. Bemutatom a szemcsés halmazok anyagtulajdonságainak valamint a boltozódás jelenségének vizsgálatára szolgáló kísérleti módszereket.

[1] Például silóknál a boltozódás szempontjából kritikus nyílásméret elméleti úton becsült, és mérésekkel meghatározott értéke között az eltérés gyakran a kétszeres értéket is meghaladja [9].

IV. Bemutatom az általam létrehozott új boltozódásvizsgáló berendezést valamint a triaxiális berendezésen általam végzett módosításokat.

V. A boltozódással kapcsolatos kísérleti vizsgálataim alapján bevezetek egy új boltozat kialakulási és tönkremeneteli modellt.

VI. Bemutatom a boltozat kialakulás és tönkremenetel numerikus szimulációjában – az új modell felhasználásával – elért eredményeimet.

1. IRODALMI ÁTTEKINTÉS

Szemcsés anyaghalmazokkal kapcsolatos vizsgálatok során a mechanikai modell megválasztása jelenti a legnehezebb feladatot. Bármennyire is időnként úgy viselkednek a szemcsés halmazok, mint a folyékony halmazállapotú anyagok, bizonyos tulajdonságaik modellezésére a folyadékmechanika nem alkalmas. Ugyanez igaz a szilárd testek mechanikájának műszaki gyakorlatban megszokott módszereire is. A későbbiekben látni fogjuk, hogy a szilárd testek mechanikájának megszokott eszközein túlmutató további meggondolásokat kell alkalmaznunk egyes jelenségek leírására.

1.1. Szemcsés halmazok kontinuum modellje

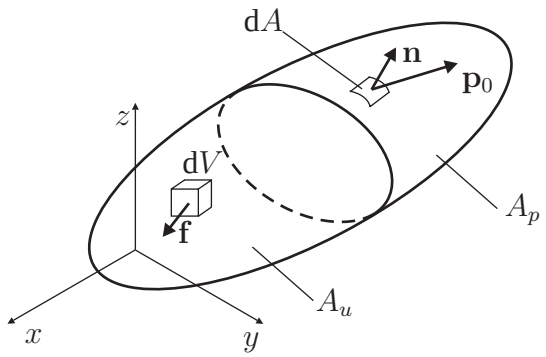
A szakirodalmi források *az anyagmodell alapján* két fő csoportra oszthatók. Túlnyomó többségük a klasszikus *kontinuummechanika* eszközrendszerét alkalmazva folytatja vizsgálatait. Másik – kisebb – részük az egyes szemcsék mozgásegyenleteit felírva, a szemcsék közötti kölcsönhatásokat leírva próbálja modellezni a szemcsehalmaz viselkedését. Ez az úgynevezett *diszkrét elemes modell* manapság egyre több kutatásban teret nyer, eredményei azonban jelenleg néhány alapvető jelenség szimulációjára korlátozódnak. Nemzetközi szinten is kiemelkedő eredményeket ért el ezen a területen Bagi [4].

Az irodalmi források – különösen [34] – alapján véleményem szerint a diszkrét elemes módszer jelenlegi állapotában *nem alkalmas* a természetes

boltozódás folyamatának általános vizsgálatára.

Amennyiben a műszaki gyakorlat számára könnyen alkalmazható, ismert fogalmakon alapuló eljárást kívánunk kifejleszteni, célszerű a klasszikus kontinuum modell alkalmazása. Dolgozatomban én is ezt az utat kívánom követni.

Kontinuum modell alkalmazása esetén a halmaz szerkezetére semmilyen feltevést nem teszünk, hanem annak sajátságait *mérésekkel meghatározott anyagi állandók* segítségével jellemezzük. Feltételezzük, hogy a szemcsés halmaz folytonosan tölti ki a rendelkezésére álló térfogatot[1]. A szemcsehalmazra jellemző mechanikai mennyiségeket folytonos függvények segítségével adjuk meg. A halmaz állapotának leírására is folytonos függvényeket alkalmazunk, az állapotváltozást pedig differenciálegyenletek alakjában írjuk fel.



1.1. ábra. Rugalmas test egy kontinuumelemmel. A kontinuumelemre ható térfogati erő $\mathbf{f}$, egy felületelemre ható külső erő $\mathbf{p}_0$.

A legegyszerűbb – és a boltozódással foglalkozó szakirodalmi forrá-

[1] Ez a kikötés maga után vonja, hogy a kontinuumelemek méretét legalább olyan nagynak kell feltételeznünk, hogy a halmaz finomszerkezetének hatásai „kiátlagolódjanak”, és legfeljebb akkorának, hogy a differenciálegyenletek felírása során végrehajtott határátmenetek még elfogadható közelítését jelentsék a valóságban lejátszódó jelenségeknek.

sok által leggyakrabban használt – modell a homogén, izotróp, lineárisan rugalmas anyagmodell. Az így modellezett szemcsehalmaz állapotát az $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ feszültségi tenzormező, az $\boldsymbol{A}(x, y, z)$ alakváltozási tenzormező és az $\mathbf{u}(x, y, z)$ elmozdulási vektormező határozza meg.

Szilárd testek rugalmas deformációjának lineáris közelítésben történő modellezése esetén a test bármely pontjában a feszültségi és az alakváltozási tenzormező közötti kapcsolatot legáltalánosabb formában egy negyedrendű tenzor, $\boldsymbol{C}$ segítségével írhatjuk fel. $\boldsymbol{C}$ összetevői a test rugalmas együtthatói, értékük elméletileg a test minden egyes pontjában, minden időpillanatban más és más lehet.

A szemcsehalmaz mechanikai állapotára jellemző mennyiségek kapcsolatát és a kontinuum környezetével való kölcsönhatását a rugalmasságtani egyenletek és azok peremfeltételei írják le (1.1. ábra):

$$\boldsymbol{F} \cdot \nabla + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \tag{1.1}$$

$$\frac{1}{2}\left(\mathbf{u} \circ \nabla + \nabla \circ \mathbf{u}\right) = \boldsymbol{A}, \tag{1.2}$$

$$\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{F}, \tag{1.3}$$

$$\mathbf{u}|_{A_u} = \mathbf{u}_0, \tag{1.4}$$

$$\boldsymbol{F} \cdot \mathbf{n}|_{A_p} = \mathbf{p}_0. \tag{1.5}$$

A fenti egyenletrendszer analitikus úton történő egzakt megoldása a gyakorlati problémák túlnyomó többségénél – és a mi esetünkben is – reménytelen feladat.

Alagutak környezetében kialakuló feszültségviszonyok analitikus úton történő tárgyalása során [31] komplex változók alkalmazásával kialakított módszere alkalmazható a legnagyobb hatékonysággal. Ennek a módszernek is erősen korlátozott azonban az alkalmazhatósága. [46] jelentős eredményeket ért el ezen a területen. Természetes boltozatok vizsgálata során azonban nem ismert a boltozat alakja, így a komplex változós módszer sem alkalmazható erre az esetre.

A gyakorlatban közelítő megoldásokat keresünk numerikus módsze-

rekkel. Különösen a végeselem módszer ad kiválóan használható numerikus eljárást, amelyet a későbbiekben fel is fogunk használni a boltozódási jelenség vizsgálatára.

1.2. Anyag- és tönkremeneteli jellemzők

A szemcsés halmazok kontinuum modelljében az anyagegyenletek teremtenek kapcsolatot a feszültségi tenzormező $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ és az alakváltozási tenzormező $\boldsymbol{A}(x, y, z)$ között. Az (1.3) összefüggésben jelennek meg azok a mennyiségek, amelyek a test anyagától függő tulajdonságokat kifejezik, ezeket szokás *anyagjellemzőnek* nevezni. A testek anyagától függő tulajdonságokat háromféleképpen határozhatjuk meg [41]:

– deduktív módon, elméleti megfontolások alapján,

– induktív úton, elsősorban kísérletekre támaszkodva,

– reológiai modellek segítségével.

Dolgozatomban a szemcsés anyagok mechanikai viselkedésének leírásához szükséges anyagjellemzőket kísérleti úton kívánom meghatározni.

A *tönkremenetelt* – a gépészmérnöki gyakorlatban – úgy definiáljuk, mint a szerkezet valamely méretének egy megengedett értéket meghaladó változását. Egy szemcsés anyaghalmaz tönkremenetele jóval bonyolultabb folyamat, mint egy acél próbatest maradó alakváltozása. Maga a tönkremenetel fogalma sem olyan egyértelmű ilyen anyagok esetén, mint a műszaki gyakorlatban általában használt anyagoknál.

2. definíció. *Szemcsés anyaghalmaz tönkremenetelének* nevezem azt a jelenséget, amely során a halmaz anyagjellemzői olyan mértékben megváltoznak (esetenként értelmezhetetlenné válnak), hogy ennek következtében a halmaz *mechanikai viselkedése jelentős mértékben módosul*.

3. definíció. *Tönkremeneteli jellemzőnek* nevezem azokat a mennyiségeket, melyek a szemcsés halmaz tönkremeneteli tulajdonságait egyértelműen meghatározzák.

A szemcsehalmazok tönkremeneteli tulajdonságait ugyancsak kísérletekre támaszkodva vizsgálom.

1.2.1. Anyagjellemzők

Homogén, izotróp, lineárisan rugalmas szilárd test esetén a $\boldsymbol{C}$ negyedrendű tenzor helyett elég két független rugalmas együtthatót – például a ν Poisson tényezőt és a G csúsztató rugalmassági modulust – alkalmaznunk [32]. Ekkor a feszültségi és alakváltozási tenzormező kapcsolatát kifejező egyenlet az általános Hooke-törvényre egyszerűsödik:

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2G}\left(\boldsymbol{F} - \frac{\nu}{1+\nu}F_I\boldsymbol{E}\right), \quad \text{vagy megfordítva} \tag{1.6}$$

$$\boldsymbol{F} = 2G\left(\boldsymbol{A} + \frac{\nu}{1-2\nu}A_I\boldsymbol{E}\right). \tag{1.7}$$

ahol F_I a feszültségi tenzor-, A_I pedig az alakváltozási tenzor első skalárinvariánsa. A G csúsztató rugalmassági modulus és az E rugalmassági modulus közötti kapcsolatot az ismert $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ összefüggés fejezi ki.

Az általános Hooke-törvényben szereplő, a szemcsés halmazra jellemző ν Poisson tényező és G csúsztató rugalmassági modulus méréséről a későbbiekben lesz szó.

A lineárisan rugalmas anyagmodell a lehető legegyszerűbb, a műszaki mechanika más területein sikerrel alkalmazott közelítés. A természetes boltozódás vizsgálatával foglalkozó kutatók döntő többsége is lineárisan rugalmas, homogén, izotróp anyagmodellt alkalmaz.

1.2.2. Tönkremeneteli jellemzők

A gépészmérnöki gyakorlatban – ahol az esetek döntő többségében acél- vagy ahhoz hasonló mechanikai tulajdonságú anyagokkal találkozunk – a tönkremenetel fogalmát a legtöbbször úgy definiálják, mint a szerkezet valamely méretének egy megengedett értéket meghaladó változását.

A vizsgált anyagokból megfelelő gondossággal kiválasztott próbatestek szakítóvizsgálatával meghatározott kritikus feszültségek és a valódi terhelésből adódó esetleg többtengelyű igénybevételek által létrehozott terhelések között pedig a redukált feszültség fogalmának alkalmazásával teremtenek kapcsolatot.

A szakítóvizsgálatból nyert kritikus feszültség és az anyagra megengedhető maximális redukált feszültség összehasonlítására tönkremeneteli kritériumokat alkalmaznak. Ezek közül a legegyszerűbb a Mohr–féle hipotézis, amely a feszültségállapotra jellemző Mohr–körök és az ún. tönkremeneteli határgörbék között vizsgál egyszerű geometriai kapcsolatokat.

A Mohr–féle kritériumnál léteznek jóval több fizikai alapot tartalmazó (pl. torzítási munkák azonosságát vizsgáló) tönkremeneteli kritériumok is. Az egyes törési elméletek között a végeredményt tekintve – a legtöbb esetben – nem túl nagy az eltérés, ezért gyakran megelégednek a Mohr–féle törési elmélet felhasználásával kapott eredményekkel.

A szemcsés anyaghalmazok tönkremenetele azonban az előbbinél sokkal összetettebb folyamat.

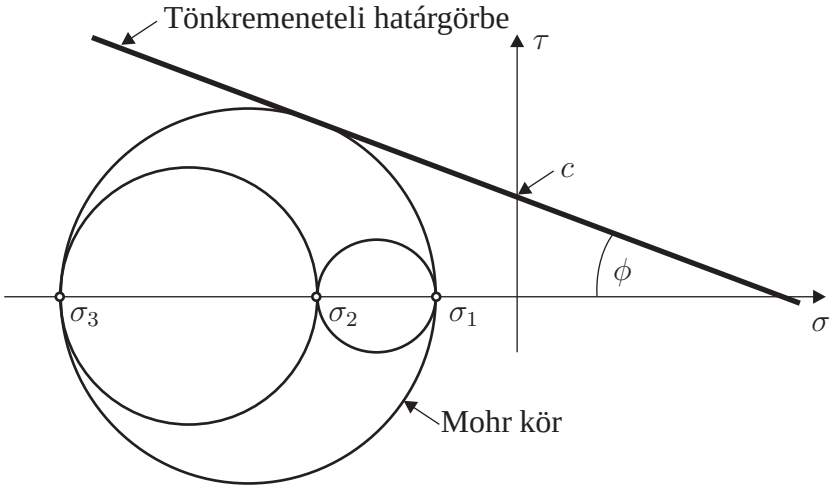
Nyírási tönkremenetel

4. definíció. A szemcsehalmaz egy elemi tartományában akkor következik be *nyírási tönkremenetel*, ha található a tartományon átmenő olyan $\mathbf{n}$ normálisú sík, amelyiken a nyírófeszültségek túllépik a σ_n normálfeszültség értékének egy meghatározott hányadát (Mohr–Coulomb-féle tönkremeneteli kritérium):

$$|\tau_{nm}| \geq \sigma_n \tan \phi, \tag{1.8}$$

ahol ϕ a halmaz belső súrlódási szöge. Amennyiben a szemcsehalmazon belüli c kohézió is létezik, az előbbi összefüggés módosul:

$$|\tau_{nm}| \geq \sigma_n \tan\phi + c. \tag{1.9}$$



1.2. ábra. Nyírási tönkremenetel.

A nyírási tönkremenetelhez tartozó Mohr-körök burkológörbéjét *tönkremeneteli határgörbének* nevezzük.

Az 1.2. ábrán vázolt tönkremeneteli határgörbe linearitása természetesen csak közelítés. Ennek a közelítésnek a jóságát méréseinknek kell eldönteniük, mint ahogy a tönkremeneteli határgörbe ϕ és c paramétereinek meghatározása is mérések útján történik.

Tönkremenetel kéttengelyű feszültségállapotban

Szemcsés anyagok tönkremeneteli tulajdonságai nem csak tömörítő erőktől, hanem a feszültségállapottól is függenek. Szemcsés anyaghalmazok

kéttengelyű feszültségállapotban a háromtengelyűhöz tartozó értéknél csak jóval kisebb nyomófeszültséget képesek elviselni.

5. definíció. *Kéttengelyű feszültségállapothoz tartozó tönkremenetelről* beszélünk abban az esetben, amikor a kéttengelyű feszültségállapotban levő anyaghalmaz a rá ható terhelések következtében elveszíti terhelhetőségét.

Kéttengelyű feszültségállapothoz tartozó határfeszültségnek nevezzük azt a nyomófeszültséget, amelynek hatására a kéttengelyű feszültségállapotban levő anyaghalmaz elveszíti terhelhetőségét

A természetes boltozatok szabad felületének környezetében a szemcsés anyag kéttengelyű feszültségállapotban van. Szükséges tehát, hogy a kéttengelyű feszültségállapothoz tartozó tönkremeneteli jellemzőket meghatározzuk, és a boltozódási folyamat során a boltív peremének mechanikai tulajdonságait a kéttengelyű feszültségállapot figyelembevételével vizsgáljuk.

*

Az itt felsorolt anyag- és tönkremeneteli jellemzőket mérésekkel kell meghatároznunk. A mérőeszközöket, mérési módszereket, valamint mérési eredményeimet a későbbiekben ismertetem.

1.3. Feszültségviszonyok szemcsés halmazokban

A természetes boltozódás jelenségének vizsgálatához elengedhetetlenül fontos a szemcsés anyaghalmazokban kialakuló feszültségviszonyok tisztázása. A feszültségviszonyok pontos ismerete nélkül nem adható becslés a természetes boltozatok várható alakjára, a boltozatban kialakuló feszültségviszonyokra, a boltozat által átívelhető maximális nyílásméretre.

A feszültségviszonyok nyomonkövetésére szolgáló elsődleges információ forrásunk a feszültségek mérések útján történő meghatározása lehetne. Silónyomás méréssel sok szerző foglalkozott Janssen cikkének megjelenése óta [18]. A méréssel kapcsolatban néhány probléma napjainkig sem

került megoldásra. Stroppel [40] foglalkozik a silónyomás mérésnek azzal az érdekes problémájával, hogy a silófalhoz rögzített nyomásmérő érzékelő elmozdulásának igen kis értéke is jelentősen befolyásolja a mért nyomásértéket. [45] a kísérleti eredmények és a silónyomás modellek összehasonlítását kísérli meg.

Sajnálatos módon a szemcsehalmazbeli feszültségviszonyok mérésére jelenleg nem áll a kutatók rendelkezésére kellő pontosságú eredményeket szolgáltató eszköz. Nagy feszültség (nyomás) értékek mérése többékevésbé elfogadható pontossággal megoldható a halmazba helyezett különféle nyomás érzékelők segítségével. Ezek az érzékelők azonban egyrészt jelentős mértékben módosíthatják a környezetükben kialakult nyomásviszonyokat, másrészt – elsősorban a szemcsés anyaghalmazok belső súrlódásának következtében – sokszor jelentős hibával terhelten működnek.

A szemcsehalmazbeli feszültségviszonyok mérésére optikai feszültség analízist is felhasználhatunk [1]. A szemcsés halmaznak optikailag érzékeny anyagszemcsékből kell állnia, és a szemcsék közötti részt olajjal kell kitölteni.

A szemcsék közötti olaj miatt a boltozódás vizsgálatokhoz használt nyitott kifolyónyílású tartályban elhelyezett anyaghalmaz feszültségviszonyainak optikai úton történő vizsgálata nem kivitelezhető.

Egyedül természetes boltozattal átívelhető kritikus nyílásméret meghatározására van lehetőségünk, és minden, a továbbiakban következő feltételezés helyességét csupán ennek a mennyiségnek a mérésével dönthetjük el.

1.3.1. Feszültségek a silóban

Janssen modellje

Az ideális folyadékokkal ellentétben a szemcsés anyaghalmazok képesek nyírófeszültségek felvételére. A falsúrlódás miatt a töltet tömegét részben a

siló fala hordozza, ezért a függőleges feszültségösszetevő értéke nem lineárisan növekszik a mélység függvényében. Ennek a változásnak a jellegét Janssen vizsgálta elsőként.

A XIX. század végén alkotta meg Janssen a silókban kialakuló nyomásviszonyokat leíró differenciálegyenletét [18]. Annak ellenére, hogy az elmúlt több, mint száz év alatt az elmélet jónéhány hiányosságára rámutattak a témával foglakozó kutatók, az Európai Únió szabványgyűjteményében (*EUROCODE 1, Part IV.: Actions in silos and tanks*) megfogalmazottak tulajdonképpen Janssen 1895-ben elért eredményeinek alkalmazásai [49].

6. definíció. *Janssen – féle feltételek:*

I. A szemcsés anyag homogén, izotróp lineárisan rugalmas kontinuumként modellezhető,

II. a terhelés az anyag önsúlyából származik,

III. a szemcsehalmaz megcsúszása a fal mellett következik be,

IV. a függőleges (σ_y) feszültség értéke egy adott magasságban állandó (1.3. ábra),

V. a $\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ hányados az y mentén állandó,

VI. az anyaghalmaz sík-alakváltozási állapotban van,

VII. a silófal végtelen merevségű,

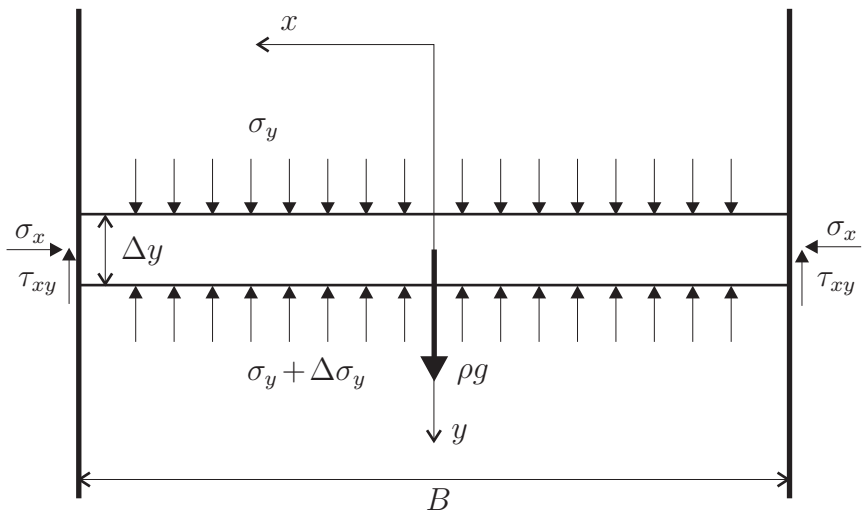
VIII. E és ν a feszültségviszonyokra nincs hatással,

IX. a halmazban kijelölt Δy magasságú töltetrész merev testként mozog a silóban.

1. tétel. *A Janssen – féle feltételek teljesülése esetén a silóban tárolt szemcsés halmazban kialakuló σ_y függőleges feszültségek meghatározhatók a*

$$\sigma_y = \frac{B\rho g}{2K}\left(1 - e^{-\frac{2K}{B}y}\right) \tag{1.10}$$

összefüggés segítségével [18].



1.3. ábra. a Δy vastagságú szelet egyensúlya Janssen szerint.

Bizonyítás. Az 1.3. ábrán vázolt, z irányban egységnyi méretű szelet egyensúlyát kifejező egyenlet:

$$B\sigma_y - B(\sigma_y + \Delta\sigma_y) + B\rho g\Delta y - 2\Delta y\tau_{xy} = 0. \tag{1.11}$$

$B\Delta y$-nal végigosztva, elvégezve a $\Delta y \to 0$ határátmenetet, majd egyszerűsítve a

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_y}{\mathrm{d}y} + 2\frac{\tau_{xy}}{B} - \rho g = 0 \tag{1.12}$$

differenciálegyenlet adódik. Mivel $\tau_{xy} = \mu\sigma_x = \mu K_1 \sigma_x$ (a III. és az V. feltételt felhasználva), ezért írható, hogy

$$\tau_{xy} = K\sigma_y, \tag{1.13}$$

ezzel

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_y}{\mathrm{d}y} + 2\frac{K}{B}\sigma_y - \rho g = 0. \tag{1.14}$$

A differenciálegyenlet megoldása:

$$\sigma_y = \frac{B\rho g}{2K}\left(1 - e^{-\frac{2K}{B}y}\right). \tag{1.15}$$

□

7. definíció. Az előbbi bizonyításban szereplő, σ_x és σ_y közötti kapcsolatot kifejező K állandót a szakirodalom *Janssen konstansnak* nevezi.

A Janssen kontans kezelése nem egységes az irodalomban. Néhány szerző ugyanis a $K_1 = \frac{K}{\mu}$ értéket nevezi Janssen konstansnak.

Janssen modelljét [47] és [9] is finomította. Módszereik és eredményeik – a lényeget tekintve – nem sokban különböznek az előzőekben leírtaktól.

Felírható a silónyomás magasságtól függő változására egy általánosabb összefüggés is, mely hengeres silóra is alkalmazható [43]:

$$\sigma_y = \frac{B\rho g}{m2K}\left(1 - e^{-\frac{m2K}{B}y}\right), \tag{1.16}$$

ahol $m = 1$ adja az előbbiekben tárgyalt esetet, $m = 2$ pedig a hengeres silóra vonatkozó megoldást.

Enstad modellje

[10] a párhuzamos falú részben található szemcsés anyaghalmazban kialakuló feszültségállapot modellezésére a [18]-ben leírt módszert használja. Ezt azonban kiegészíti azzal, hogy meghatározza a K konstans értékét, bizonyos feltételezések mellett.

Amennyiben a szemcsés anyag a silófal mentén mindenütt megcsúszási határhelyzetben van, akkor a Janssen konstans [10] szerint a

$$K = \frac{1+\sin\phi\cos 2\lambda}{1-\sin\phi\cos 2\lambda} \tag{1.17}$$

összefüggéssel számítható, ahol

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(\phi_w + \omega\right), \tag{1.18}$$

$$\sin\omega = \frac{\sin\phi_w}{\sin\phi}. \tag{1.19}$$

A szemcsehalmazban ébredő függőleges (y) irányú feszültségek pedig meghatározhatók az (1.10) Janssen-féle egyenlettel.

8. definíció. *Aktív* Rankine féle állapotnak nevezzük azt az esetet, amikor a szemcsés anyaghalmaz minden pontjában a csúszás határállapotában van [23].

9. definíció. *Passzív* állapotról beszélünk abban az esetben, amikor a szemcsés halmaz képes a rá ható erőkkel szemben ellenállás kifejtésére.

[9] szerint a Janssen egyenletben szereplő K konstans értéke a siló függőleges falakkal határolt tartományában:

$$K = \frac{1-\kappa\sin\phi}{1+\kappa\sin\phi}\tan\phi_w, \tag{1.20}$$

a kúpos szakaszon pedig

$$K = \frac{1-\kappa \sin\phi \cos 2\phi_w}{1+\kappa \sin\phi} \tan\phi_w. \tag{1.21}$$

Itt $\kappa = 1$ aktív, $\kappa = -1$ passzív feszültségi állapot esetén.

Csizmadia modellje

Önsúlyával terhelt, függőleges falak közé helyezett szemcsés anyaghalmazban kialakuló feszültségek meghatározásának általánosabb módszerét vizsgálja [8].

10. definíció. *Csizmadia–féle feltételek*:

I. A szemcsehalmaz homogén, izotróp kontinuum.

II. A terhelés csak az anyaghalmaz önsúlyából származik.

III. Az anyagtulajdonságok lineáris függvénnyel modellezhetők.

IV. A halmaz belső súrlódása és kohéziója valamint a fal és a szemcsehalmaz közötti súrlódás nem hagyható figyelmen kívül.

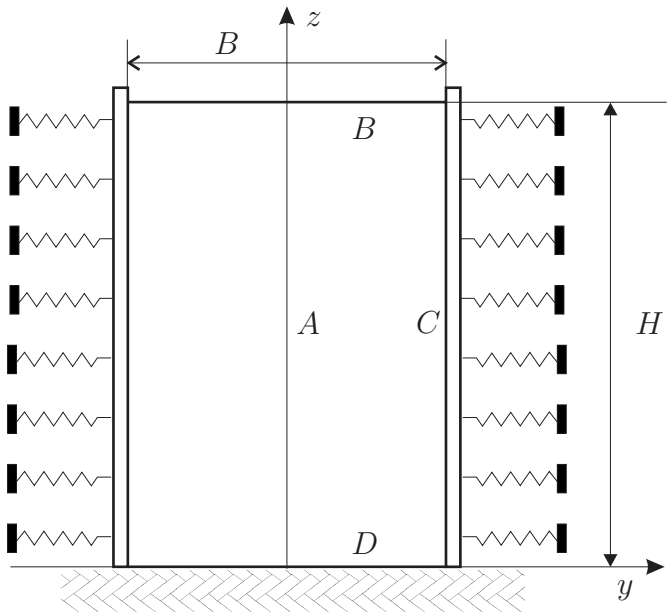
V. A silófal megtámasztása rugalmas (C felület) (1.4. ábra).

VI. A szemcsehalmaz a fal mellett csúszási határhelyzetben van.

VII. A siló alján nincs súrlódás (D felület).

VIII. A halmaz síkalakváltozási állapotban van.

IX. A felső részen $\sigma_y =$ állandó (B felület).



1.4. ábra. Csizmadia silómodellje.

1. állítás. A Csizmadia – féle feltételek teljesülése esetén a modellsilóban kialakuló feszültségviszonyok leírhatók egy $\Phi(y,z)$ feszültségfüggvény segítségével, melyre:

$$\sigma_y = \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}; \qquad \sigma_z = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \rho g z; \qquad \tau_{yz} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial y \partial z}, \tag{1.22}$$

$$\sigma_x = \nu(\sigma_y + \sigma_z). \tag{1.23}$$

$$\frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4} + 2\frac{\partial^4\Phi}{\partial y^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4\Phi}{\partial z^4} = 0. \tag{1.24}$$

Csizmadia a silóban kialakuló feszültségviszonyok vizsgálatát a (1.24) biharmonikus egyenlet megoldására vezette vissza. A peremfeltételekre és

megoldási módszerekre részletesebben itt nem térek ki [8]. A biharmonikus egyenlet megoldását a szerző a véges differenciák módszerével kereste.

Csizmadia modelljét használva lehetőség nyílik a siló oldalfal merevségének figyelembevételére, amely [25] szerint a betonénál rugalmasabb (pl. acéllemez) oldalfalú silók esetén nagy fontossággal bír.

1.3.2. Feszültségek a garatban

Jenike modellje

[19] vizsgálataihoz a garatban található szemcsés anyagot a függőleges falakkal határolt résznél alkalmazottakhoz hasonlóan vízszintes síkokkal bontotta szeletekre, és egy ilyen szelet egyensúlyának vizsgálatával vezette le a feszültségeloszlást meghatározó differenciálegyenletet.

2. tétel. *A Janssen – féle feltételek teljesülése esetén a*

$$\sigma_y = -\frac{\rho g y}{1+N} + C y^{-N} \tag{1.25}$$

összefüggés adja a garat középvonalában, függőleges irányban kialakuló feszültségeloszlást [19].

Bizonyítás. A 1.5. ábrán vázolt szelet egyensúlyát kifejező egyenlet:

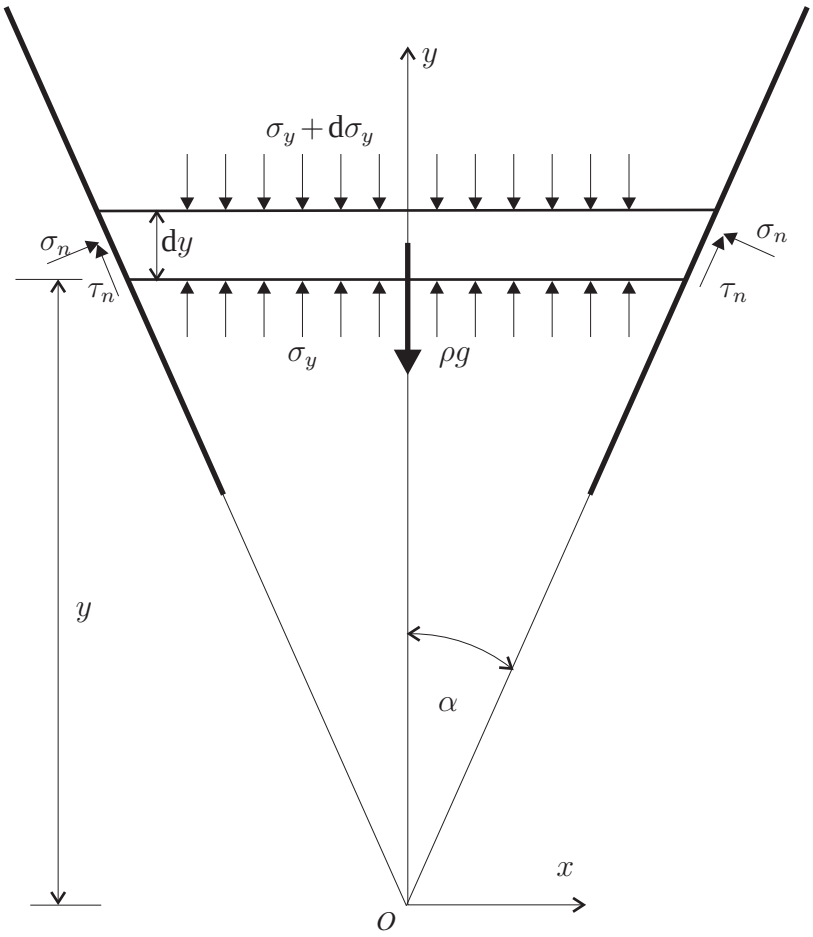
$$2y\tan\alpha\sigma_y - 2(y+\mathrm{d}y)(\sigma_y+\mathrm{d}\sigma_y)\tan\alpha + 2\mathrm{d}y(\sigma_n\tan\alpha+\tau_n) - 2y\rho g\mathrm{d}y\tan\alpha = 0. \tag{1.26}$$

Az egyenletet rendezve és a másodrendűen kicsiny mennyiségeket elhanyagolva a

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_y}{\mathrm{d}y} + \frac{1}{y}\left(\sigma_y - \sigma_n - \frac{\tau_n}{\tan\alpha}\right) + \rho g = 0 \tag{1.27}$$

differenciálegyenlet adódik. Helyettesítve $\tau_n = K'\sigma_y$ és $\sigma_n = \frac{K'}{\tan\phi_w}\sigma_y$ értékeket Jenike a

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_y}{\mathrm{d}y} + N\frac{\sigma_y}{y} + \rho g = 0 \tag{1.28}$$



1.5. ábra. a dy vastagságú szelet egyensúlya a garatban, Jenike szerint.

differenciálegyenletet kapja, ahol $N = 1 - K'(\mathrm{ctg}\phi_w + \mathrm{ctg}\alpha)$. Ennek általános megoldása

$$\sigma_y = -\frac{\rho g y}{1+N} + C y^{-N}. \tag{1.29}$$

□

K' szerepe hasonlít a K konstanséhoz, azonban $K' \neq K$.

11. definíció. *Átmeneti tartománynak* nevezem függőleges falakkal határolt rész és a garat találkozásának környezetét.

C meghatározásához a függőleges és a kúpos rész közötti átmenet tartományában ismerni kell σ_y értékét. A feszültségfüggvény azonban az átmeneti tartományban nem folytonos a mérések szerint [44]. A differenciálegyenlet megoldását vizsgálva Jenike megállapítja, hogy a kúpos rész bemeneti oldalán ébredő feszültségek nagysága nincs nagy hatással a kifolyónyílás környezetében keletkező feszültségekre.

Végeselem módszerrel végzett számításaim szerint Jenike előbbi feltételezése *nem állja meg a helyét*. Vizsgálataim során azt tapasztaltam, hogy az átmeneti tartományban kialakult feszültségviszonyok kismértékű megváltozása is komoly hatással van a talppontban számított feszültségek értékére.

Amennyiben csak a kúp csúcsának környezetében kialakuló feszültségviszonyokat vizsgáljuk, akkor a $C = 0$ feltételt alkalmazhatjuk. Ezzel a

$$\sigma_y = -\frac{\rho g}{1+N} y \tag{1.30}$$

összefüggést nyerjük a garat középvonalában keletkező feszültségekre.

12. definíció. *Radiális megoldásnak* nevezi a szakirodalom a

$$\sigma_y = -\frac{\rho g}{1+N} y \tag{1.31}$$

összefüggéssel nyert feszültségeloszlást[2].

[2] Esetenként a megoldás tényleges alakja kismértékben eltér a definícióban szereplőtől, de a linearitás, és a monoton csökkenés (!) minden esetben megmarad

A σ_y feszültség ismeretében meghatározható a másik két feszültség:

$$\tau_n = -\frac{\rho g K'}{1+N} y, \tag{1.32}$$

$$\sigma_n = -\frac{\rho g K'}{(1+N)\tan\phi_w} y. \tag{1.33}$$

Enstad modellje

A garatban kialakuló feszültségviszonyok vizsgálatához Enstad az alábbi feltételezésekkel él [10].

13. definíció. *Enstad – féle feltételek:*

I. A szemcsés anyag a függőleges falakkal határolt tartományban *aktív* feszültségállapotban van.

II. A garatban található anyaghalmaz *passzív* feszültségállapotban van.

III. Az azonos feszültségállapotban lévő anyagrészek a garatban olyan tartományokban helyezkednek el, amelynek határait a szimmetriatengelyen elhelyezkedő középpontú, excentrikus körök alkotják.

IV. A nagyobb főfeszültség az előbbi körívek érintőjének irányában hat.

3. tétel. *Az Enstad – féle feltételek teljesülése esetén a garat középvonalában kialakuló feszültségviszonyokat a*

$$\sigma(r) = \frac{\rho g Y r}{X-1} + \left(\sigma(R) - \frac{\rho g Y R}{X-1}\right)\left(\frac{r}{R}\right)^X \tag{1.34}$$

egyenlet írja le.

Bizonyítás. Az 1.6. ábrán látható szelet egyensúlyának vizsgálatából (Enstad jelöléseivel) a következő differenciálegyenlet adódik:

$$r\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}r} - X\sigma = -\rho g Y r. \tag{1.35}$$

Az állítás bizonyítása a fenti differenciálegyenlet megoldásával történik. Ennek részleteire itt nem térek ki, lásd [10]. □

Enstad szerint passzív feszültségállapot esetén

$$X = \frac{\sin\phi}{1-\sin\phi}\left(1+\frac{\sin\left(2\beta_p+\alpha\right)}{\sin\alpha}\right), \tag{1.36}$$

$$Y = \frac{\sin\alpha\left(\beta_p+\alpha\right)+\sin\beta_p\sin\left(\beta_p+\alpha\right)}{\left(1-\sin\phi\right)\sin^2\left(\beta_p+\alpha\right)}, \tag{1.37}$$

míg aktív feszültségállapotban a a differenciálegyenletben szereplő konstansok meghatározásának módja:

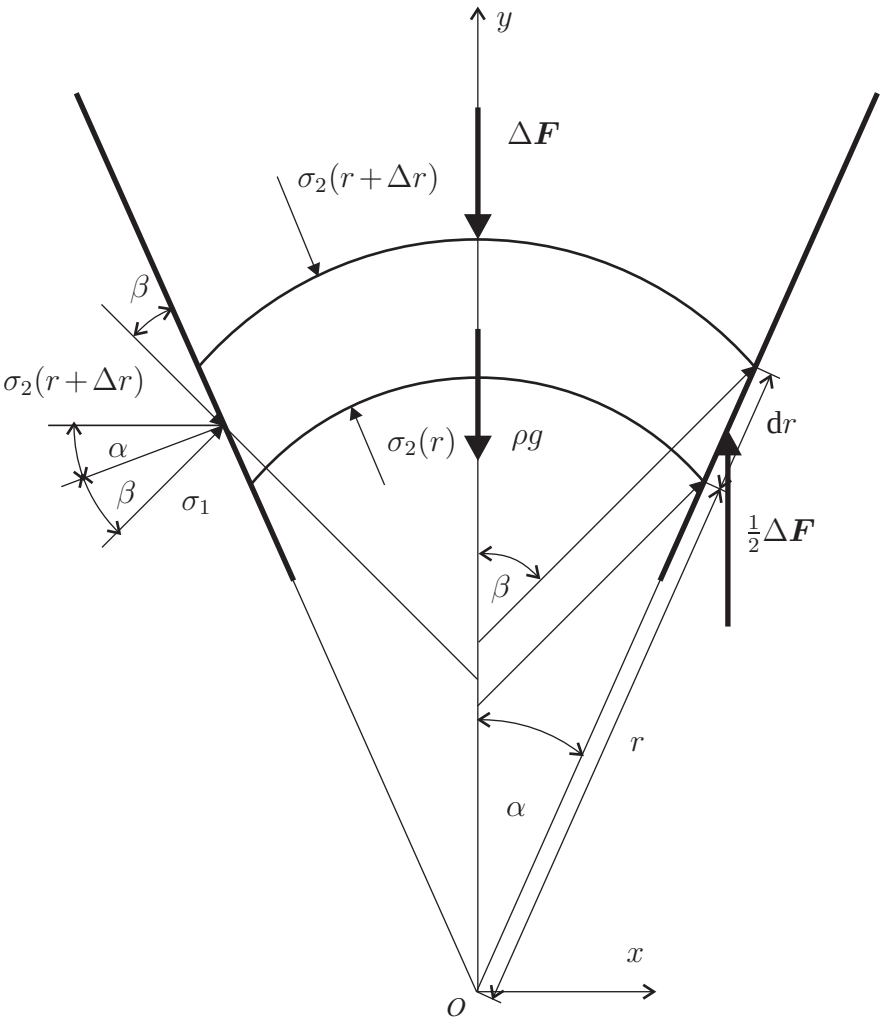
$$X = \frac{\sin\phi}{1+\sin\phi}\left(\frac{\sin\left(2\beta_a+\alpha\right)}{\sin\alpha}-1\right), \tag{1.38}$$

$$Y = \frac{\sin\alpha\left(\beta_a+\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\cos\beta_a\cos\left(\beta_a+\alpha\right)}{\left(1+\sin\phi\right)\cos^2\left(\beta_a+\alpha\right)}. \tag{1.39}$$

Aktív feszültségállapot a garatban csak akkor jöhet létre [10], ha

$$\alpha \leq \frac{\pi}{2} - \beta_a. \tag{1.40}$$

Az (1.34) egyenletet megvizsgálva láthatjuk, hogy – mivel X egy körülbelül 10 nagyságrendű szám – az egyenlet első tagja fog dominálni a garat csúcsánál, a kifolyónyílás közelében. Ez azt jelenti, hogy ebben a tartományban a feszültségek értéke Enstad szerint is r-rel arányos, ugyanúgy, mint ahogyan azt Jenike modelljénél is tapasztaltuk.



1.6. ábra. Egy anyagréteg egyensúlya a garatban, Enstad szerint.

Enstad módszere tehát gyakorlati szemszögből nem ad számunkra többet, mint Jenike modellje, hiszen a természetes boltozat környezetében

mindkét gondolatmenet lineáris feszültségeloszlást (az úgynevezett radiális feszültségmezőt) eredményez.

A radiális feszültségmező alkalmazásánál mindkét szerző abból a *hibás* feltételezésből indul ki, hogy a radiális feszültségmező hipotézis zárt kiömlőnyílás esetén is érvényes. Ha végeselem módszerrel megvizsgáljuk a silóban kialakult feszültségviszonyokat, akkor láthatjuk, hogy a radiális feszültségmező csak nyitott kiömlőnyílásnál jelentkezik (3.9. ábra).

1.3.3. Feszültségek a modellsilóban

A [9] által boltozódási vizsgálatokra alkalmazott modellsiló adatait felhasználva meghatároztam (Janssen módszerével) a silóban függőleges irányban keletkező feszültségeket. Janssen szerint

$$\sigma_y = \frac{B\rho g}{2K}\left(1 - e^{-\frac{2K}{B}y}\right). \tag{1.41}$$

A garatbeli feszültségviszonyokat pedig a Jenike által levezetett

$$\sigma_y = -\frac{\rho g}{1+N}y \tag{1.42}$$

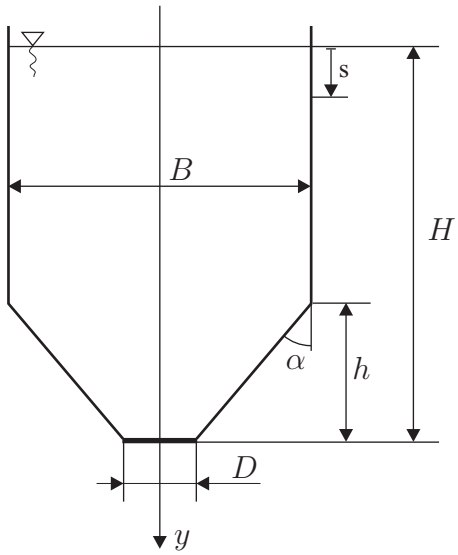
egyenlet segítségével határoztam meg.

A modellsiló (1.7. ábra) geometriai adatai: $H = 1.7$m magas, a garat magassága $h = 0.7$m, a siló szélessége $B = 1.3$m, a garat félkúpszöge $\alpha = 40°$.

A töltet anyaga gipsz, melynek fajsúlya $\gamma = 12.85\frac{\text{kN}}{\text{m}^3}$, a falsúrlódási szög $\phi_w = 38.2°$, belső súrlódása $\phi = 54.1°$.

Az (1.41) összefüggésben szerepel a K' tényező, melynek meghatározása [9] szerint a

$$K' = \frac{1-\kappa\sin\phi}{1+\kappa\sin\phi}\tan\phi_w \tag{1.43}$$



1.7. ábra. Drescher modellsilójának méretei.

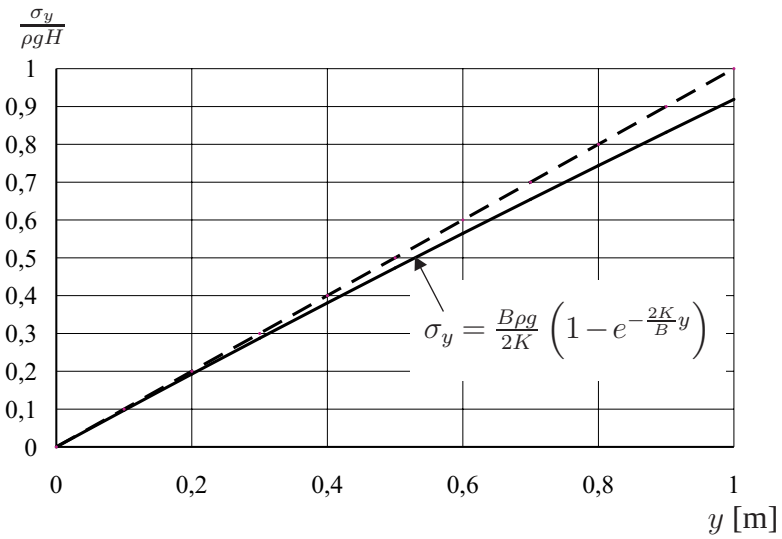
egyenlettel határozható meg. Tételezzük fel, hogy esetünkben $\kappa = 1$ eset – aktív állapot – valósul meg, ezért K' értéke:

$$K' = \frac{1-\sin 54.1^\circ}{1+\sin 54.1^\circ} \tan 38.2^\circ = 0.08. \tag{1.44}$$

K'-t felhasználva meghatározhatjuk a függőleges irányban feltételezett σ_y feszültségeloszlást (1.41) felhasználásával:

$$\sigma_y = 104.41 \left(1 - e^{-0.12y}\right). \tag{1.45}$$

Az így számolt feszültségeloszlás látható a 1.8. ábrán. Láthatjuk, hogy ez exponenciális tag hatása ilyen kis ($y = 1$m) mélységben még nem számottevő. Természetesen nagy silómagasság esetén az eltérés a hidrosztatikus megoldástól igen jelentős lehet [39].



1.8. ábra. Feszültségek a modellsilóban. Szaggatott vonallal a hidrosztatikus modellhez tartozó feszültség értékeket rajzoltam meg.

A garatbeli feszültségeloszlásra felírt (1.42) összefüggésben szerepel az $N = 1 - K'(\text{ctg}\phi_w + \text{ctg}\alpha)$ konstans, amelynek értéke esetünkben:

$$N = 1 - 0.08(\text{ctg}38.2^\circ + \text{ctg}40^\circ) = 0.8. \tag{1.46}$$

N értékét felhasználva

$$\sigma_y = -\frac{\rho g}{1+N} y = 7.14y, \tag{1.47}$$

ha y értékét a garatot alkotó *kúp csúcsától* felfelé mérjük.

A „fentről lefelé” és „lentről felfelé” meghatározott feszültség értékek a függőleges falakkal határolt rész és a garat találkozási pontjánál *nem ugyanazt az értéket adják*. A mérések [44] szerint is létezik ez a feszültségugrás.

1.4. Boltozódás

A természetes boltozódás vizsgálata során a kutatók – a silókkal kapcsolatos boltozódásvizsgálatoknál – két lényeges kérdés megválaszolására törekednek [9] összefoglaló munkája szerint:

I. Azon feszültségek meghatározására, amelyek a szemcsés anyag tömörödését okozzák. A tömörödés hatására létrejövő anyagtulajdonság változások következtében a szemcsés anyag képessé válik önsúlyának és esetleg a felette elhelyezkedő anyagréteg súlyából adódó terhelések elviselésére.

II. A természetes boltozatot alkotó szemcsehalmazban keletkező feszültségek meghatározására. A feszültségek és a tönkremeneteli kritériumoknak az ismeretében kívánják meghatározni a boltív teherbírását és ebből a kritikus nyílásméretet.

Itt először a boltozódási folyamat vizsgálatának általános leírását kívánom megadni, a későbbiekben részletezem az egyes szerzők munkáit.

[19] és [9] feltételezik, hogy a tömörödést okozó feszültségek nagysága egyenesen arányos a siló kúpos részének csúcsától mért távolsággal (radiális feszültségmező hipotézis). Feltételezéseik szerint ez a radiális feszültségmező okozza a szemcsehalmaz olyan mértékű deformációját, melynek hatására a „tönkremenetel” lezajlik, a boltozat összeomlik.

A tömörödés okozójának a fal mellett kialakuló legnagyobb főfeszültséget tekintik. A tömörödést okozó σ_t feszültséget

$$\sigma_t = \rho g r \mathrm{f}(\phi, \alpha, \phi_w) \tag{1.48}$$

alakban határozzák meg a szerzők, ahol r a garat csúcsától mért távolság.

A boltívben kialakuló feszültségek meghatározása során a szerzők előzetesen feltételezik, hogy milyen alakú az adott boltív, és ezen feltételezés felhasználásával számítják ki a boltívben ébredő feszültségeket.

A fal melletti legnagyobb főfeszültség értéke [19]:

$$\sigma_{1,a} = \rho g r \mathrm{g}(\phi_w, \alpha) \tag{1.49}$$

alakú.

Az egyes elméletek a boltív alakjával, valamint a tönkremenetellel kapcsolatos feltételezésekben különböznek. Természetesen az egyes modellekben az $\mathrm{f}(\phi, \alpha, \phi_w)$ és $\mathrm{g}(\phi_w, \alpha)$ függvények alakja is különböző.

A kapott $\sigma_{1,a}$ feszültséget ezután összehasonlítják a nyíródobozos vagy a triaxiális vizsgálatból származó tönkremeneteli határfeszültséggel, amelynek meghatározásáról a későbbiekben lesz szó.

A természetes boltozat kialakulásának szükséges feltétele:

$$\sigma_{1,a} \leq \sigma_K, \tag{1.50}$$

ahol σ_K a tönkremeneteli határfeszültség.

14. definíció. *Kritikus nyílásméretnek* nevezzük a siló kifolyónyílásának azt a legkisebb méretét, amelynél az anyag akadálytalanul ki tud folyni a silóból.

$\sigma_{1,a}$ ismeretében a kritikus nyílásméret meghatározható:

$$D_k = \frac{2\sigma_{1,a} \sin\alpha}{\rho g \mathrm{g}(\alpha, \phi_w)}. \tag{1.51}$$

A $\mathrm{g}(\alpha, \phi_w)$ függvény típusa a boltozat alakjára tett feltételezésektől függ.

A garatbeli radiális feszültségmező kialakulásának szükséges feltétele az anyag sűrűségének állandósága [9]. Ha a sűrűséget állandónak tekintjük a teljes vizsgálat során, akkor nincs tömörödés, azaz éppen az a hatás nem jelentkezhet, ami a fenti modell szerint a boltozódást okozza. A silóban tárolt szemcsés anyag anyagjellemzőit a garatbeli, tömörített állapotra vonatkozóan kell megadnunk.

A garatbeli szemcsehalmazt sokan különálló, önkényesen kijelölt alakú és kiterjedésű boltívekre osztják, majd ezek teherbírására vonatkozó

feltételezésekből kívánják a kritikus kiömlőnyílás méretét meghatározni. Ennek semmilyen mechanikai alapja nincs. A garatbeli anyaghalmazban nem alakulnak ki ilyesféle egymásra támaszkodó öntartó ívek.

A radiális feszültségmező hipotézis csak nyitott kifolyónyílás esetén jelent elfogadható közelítést. Jenike és Enstad a radiális feszültségmező hipotézisét alkalmazza a boltozat terhelhetőségének meghatározása során, azaz – kimondatlanul – a boltozódást az anyag kiáramlási folyamatának megszakadásaként modellezi. A feszültségviszonyok elemzése során viszont az anyaghalmaz mozgásából eredő határokat teljesen figyelmen kívül hagyják.

A halmaz a természetes boltozatok környezetében kéttengelyű feszültségállapotban van. A tönkremenetelhez tartozó kritikus nyomófeszültség értékét egytengelyű feszültségállapotban vizsgálják. A kéttengelyű és egytengelyű feszültségállapotban mérhető kritikus nyomófeszültség értéke nem ugyanakkora.

A fejezet további részében található elméleti eredmények és a mérési eredmények összehasonlítása azt mutatja, hogy *a napjainkban alkalmazott – az előbbiekben általánosan összefoglalt – elméletek jelentős túlméretezéshez vezetnek és feltételezhetően csak durva közelítését jelentik a valóságos folyamatoknak.*

1.4.1. Jenike modellje

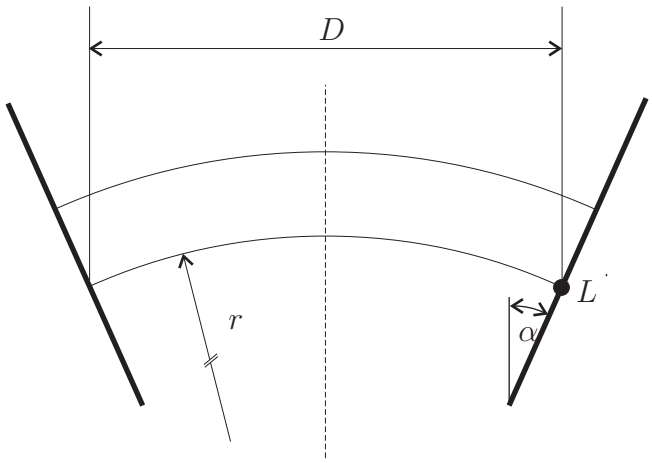
[19] szerint a szemcsehalmaz a kifolyás során olyan öntartó boltíveket alkot, amelyek képesek az anyag kiömlésének megakadályozására. Jenike feltételezése szerint *a szemcsehalmazban kialakuló boltozatnak csak a saját súlyát kell megtartania.*

Jenike szerint a garatban lefelé haladva a szemcsehalmazra ható nyomóerő értéke csökken.

Jenike állítása *nem igaz* a kiömlőnyílás kinyitásának pillanatában, amikor nincs anyagkiáramlás – mint azt végeselem módszerrel végzett számításaim mutatják – hanem csak a kiáramlási folyamat során élhetünk ilyen

feltételezéssel.

Mivel a párhuzamos tartomány alján jelentkező nagy nyomás hatására az anyag tömörsége megnövekedett, elképzelhető, hogy a kifolyónyílás környezetében képes a saját súlyából adódó terhelés elviselésére. Ekkor a kifolyás megszűnik, az anyag boltozódik.



1.9. ábra. Boltozat a garatban.

A boltívben ébredő maximális feszültség arányos a boltív szélességével, a maximális feszültség pedig a fal melletti érintkezési pontban ébred. Közelítő értéke:

$$\sigma_{1,a} \approx \rho g D = 2r\rho g \sin\alpha. \tag{1.52}$$

A boltozat összeomlásának feltétele Jenike szerint a

$$\sigma_{1,a} \geq \sigma_K \tag{1.53}$$

egyenlőtlenség teljesülése.

A kritikus nyílásméret meghatározásához meg kell találni r-nek azt az értékét, melyre

$$F_F(\sigma_t) = \sigma_K = \sigma_{1,a} = 2r\rho g \sin\alpha \tag{1.54}$$

teljesül. Kritikus nyílásméretnek nevezi azt a $D_k{=}2r\sin\alpha$ értéket, melynél az (1.53) egyenlőtlenségből egyenlőség lesz. Tehát a

$$\sigma_{1,a} = 2r\rho g\sin\alpha = D_k\rho g = \sigma_K = F_F(\sigma_t) \tag{1.55}$$

egyenlőséghez tartozó D_k kritikus nyílásméretet keresi. Nehézséget okoz azonban az, hogy az $F_F(\sigma_t)$ folyási függvény értékének nem ismert explicit alakja, értékét általában grafikus úton szokták meghatározni. E nehézség leküzdésére Jenike bevezette a folyási faktor fogalmát.

15. definíció. *Folyási faktornak* nevezi Jenike a garat fala mellett keletkező legnagyobb főfeszültség $(\sigma_{1,a})$ és az előtömörítő (σ_t) feszültség hányadosát:

$$f_f = \frac{\sigma_t}{\sigma_{1,a}}. \tag{1.56}$$

A folyási faktor felhasználásával az

$$\sigma_K = F_F(\sigma_t); \qquad \sigma_{1,a} = \frac{1}{f_f}\sigma_t \tag{1.57}$$

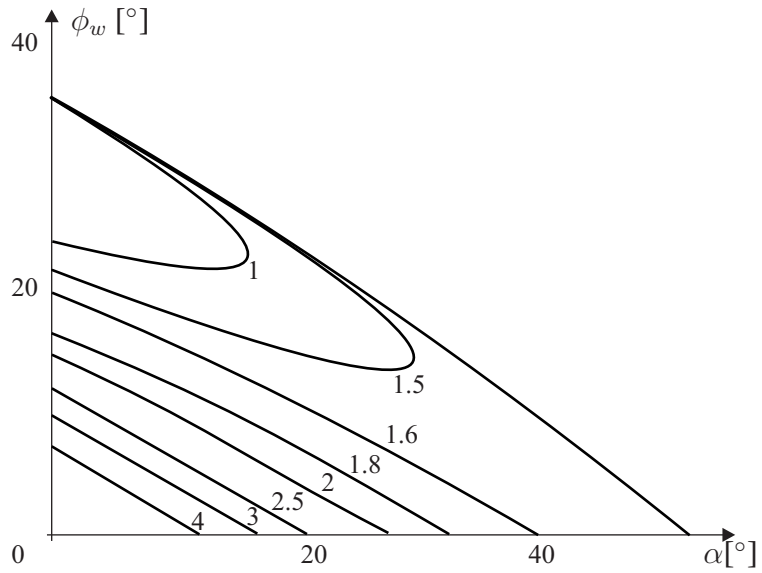
egyenletrendszert kell megoldani. Ennek közelítő megoldása általában grafikus eljárással történik. Az F_F függvény grafikonját metszik el egy $\frac{1}{f_f}$ meredekségű egyenessel.

Az 1.10. ábrán látható diagramhoz hasonlók valamelyikének segítségével határozható meg f_f értéke.

Jenike a halmaz garatbeli feszültségviszonyait leíró differenciálegyenlet numerikus megoldásának felhasználásával alkotta meg az 1.10. és az ehhez hasonló jellegű, további diagramokat [44]. A silótervezéssel foglalkozó szakemberek gyakran használják ezeket az ú.n. Jenike diagramokat.

Kohéziós anyagok esetén $\sigma_K{=}F_F(\sigma_t)$ esetenként meghatározható analitikus úton is, a Warren – Spring egyenlet felhasználásával [44]:

$$\sigma_K = A\left[\left(\frac{\sigma_t}{F}+1\right)^{\frac{1}{q}}-1\right], \tag{1.58}$$



1.10. ábra. Folyási faktor értékei a falsúrlódás ϕ_w és a garat félkúpszögének α függvényében, $(\phi = 40°)$. [20].

itt A, F és q anyagra jellemző állandók.

Az állandók értékei az 1.2. táblázatban láthatók néhány anyagra.

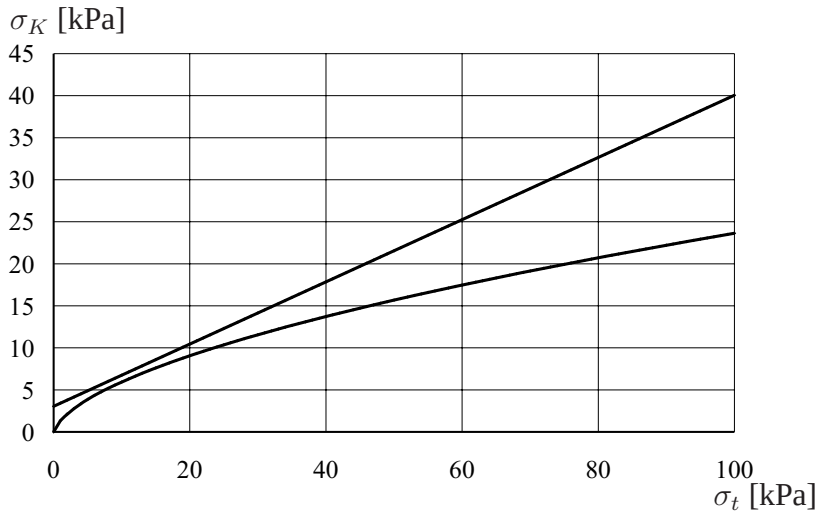
A folyási függvény lineáris alakja:

$$\sigma_K = M\sigma_t + Q, \tag{1.59}$$

ahol M és Q anyagfüggő állandók.
A tönkremeneteli határgörbék jellegzetes alakja látható az 1.11. ábrán.

Az 1.11. ábrát megfigyelve szembetűnő az eltérés a lineáris és nemlineáris tönkremeneteli határgörbe között (más anyagok esetén is). Nehezen valószínűsíthető, hogy mindkét görbe elfogadható pontossággal leírná a valóságban lezajló tönkremeneteli folyamatot.

Az egyes tönkremeneteli határgörbék alkalmazhatóságával kapcsolatos



1.11. ábra. Tönkremeneteli határgörbék gipsz esetén. [9].

információkat a szakirodalom áttanulmányozása során nem találtam. Kísérleti vizsgálataim a lineáris határgörbe alkalmazhatóságát erősítik meg.

Jenike azon feltevése, amely szerint a boltívnek csupán saját súlyát kell elviselnie, valamint a boltozat alakjának önkényes, minden mechanikai alapot nélkülöző kijelölése következtében és a folyási faktor méréssel meghatározott értékében rejlő bizonytalanságok együttes hatásaként *a Jenike módszerével meghatározott kritikus kiömlőnyílás-méret kettő–négyszerese a méréssel meghatározható értéknek.*

1.4.2. Enstad modellje

A boltozódás szempontjából kritikus kifolyónyílás méret Jenike módszerével történő meghatározása jelentős túlméretezéshez vezet.

A túlméretezés két fő oka [10]:

– Jenike nem vette figyelembe annak lehetőségét, hogy a boltozatot

alkotó szemcsehalmaz megcsúszhat a fal mentén, valamint

– a boltívet alkotó szemcsés anyagnak a saját súlya mellett a felette lévő anyagtömeg egy részének súlyát is meg kell tartania.

Enstad e két dolgot próbálja elméletében figyelembe venni, és így kíván pontosabb modellel szolgálni a boltozódási folyamat vizsgálatához.

Az Enstad által a garatbeli feszültségek eloszlására levezetett egyenlet, (lásd a 1.6. ábrát is) a

$$\sigma(r) = \frac{\rho g Y r}{X-1} + \left(\sigma(R) - \frac{\rho g Y R}{X-1}\right)\left(\frac{r}{R}\right)^X \tag{1.60}$$

összefüggés csak abban az esetben érvényes a feszültségekre, amelyben a szemcsés anyag szabadon áramlik kifelé a garatból, vagy ha a kifolyónyílás zárva van. A feszültségeloszlás nagymértékben megváltozik a kifolyónyílás megnyitásának pillanatában ha a szemcsehalmaz boltozódik.

A boltozat kialakulásához szükséges kritikus nyílásméret meghatározásához Enstad feltételezi, hogy a garatban található szemcsés anyagban ébredő feszültség mindenütt elérte a kritikus állapothoz szükséges értéket. Ez a feltételezés véleményem szerint csak igen speciális esetben felel meg a valóságnak. Esetleg a szemcsés anyag kiömlése során elfogadható, de a tároló kinyitásának pillanatában nem.

A szemcsehalmazt továbbra is ugyanolyan körívekkel határolt tartományokra osztja, mint amelyeket a feszültségeloszlás meghatározásához alkalmazott. Ez esetben azonban a tartományok – a boltozatok – oldalfallal érintkező részének középvonala a falra bocsátott normálvektorral ζ szöget zár be, és ez a ζ szög akkora érétket vesz fel, hogy a lehetséges legnagyobb támasztóerők jelentkezzenek a boltívek talapzatánál a megcsúszás határhelyzetében:

$$\zeta = \begin{cases} \phi & \text{ha } \phi \leq \zeta_m, \\ \zeta_m & \text{ha } \phi > \zeta_m. \end{cases} \tag{1.61}$$

ahol

$$\zeta_m = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}. \tag{1.62}$$

A teljes szemcsehalmazban aktív feszültségállapotot feltételez. Ez azt jelenti, hogy a σ_1 legnagyobb és σ_3 legkisebb főfeszültségek ahhoz a Mohr körhöz tartoznak, amelyik érinti a tönkremeneteli határgörbét (azaz nyírási tönkremenetelt vizsgál):

$$\sigma_1 = \sigma_K + \frac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi}\sigma_3. \tag{1.63}$$

A törési határgörbéről feltételezi, hogy egyenes; a belső súrlódási szög ϕ állandó. A tönkremeneteli határfüggvény $\sigma_K(\sigma_1)$ egyenletét:

$$\sigma_K = M\sigma_1 + Q = M\sigma(1+\sin\phi) + Q \tag{1.64}$$

alakúnak feltételezi.

[9] szerint ez a feltételezés nagy σ_1 értékekre jó közelítés, azonban nem teljesül a kis σ_1 főfeszültségek tartományában.

$\sigma(r)$-et a (1.34) egyenletből számítva, az egyes rétegek egyensúlyát feltételezve a következő egyenlet adódik:

$$\sigma_3(r) = a\left(\frac{r}{R}\right)^X + b\left(\frac{r}{R}\right)^{X_b} + d\left(\frac{r}{R}\right) + e. \tag{1.65}$$

Az egyenletben szereplő konstansok meghatározásáról Enstad munkájának mellékletében olvashatunk [10] .

$\sigma_3(R)$ meghatározható a

$$\sigma_3(R) = (1-\sin\phi)h\sigma_r \tag{1.66}$$

összefüggésből ahol σ_r Enstad szerint kiszámolható a Janssen-féle képlet segítségével:

$$\sigma_r = \frac{B\rho g}{2K}\left(1-e^{-\frac{2K}{B}y}\right). \tag{1.67}$$

Mivel a boltozat alján ébredő normálfeszültségnek zérusnak kell lennie, ezért a boltozódás szempontjából kritikus nyílásméret Drescher szerint a

$$\sigma_3(r) = a\left(\frac{r}{R}\right)^X + b\left(\frac{r}{R}\right)^{X_b} + d\left(\frac{r}{R}\right) + e = 0 \tag{1.68}$$

egyenlet megoldásából határozható meg.

A kifolyónyílás környezetében Enstad szerint elfogadható közelítést jelent a

$$\sigma_3(r) \approx d\left(\frac{r}{R}\right) + e \tag{1.69}$$

összefüggés használata is. Ebben az esetben a kritikus nyílásméret:

$$D_k = 2r_k \sin\alpha, \tag{1.70}$$

ahol

$$r_k = \frac{X_b - 1}{X_b}\frac{Z_0}{\rho g Y_b}. \tag{1.71}$$

A legalsó réteget vizsgálva és elhanyagolva a boltív felett lévő anyagtömegből adódó terhelést

$$D_{k0} = 2r_{k0} \sin\alpha \tag{1.72}$$

ahol

$$r_{k0} = \frac{Z_0}{\rho g Y_b}. \tag{1.73}$$

Ez utóbbi érték megegyezik a Jenike módszerével meghatározható kritikus kifolyónyílás mérettel. Látható az is, hogy $D_k < D_{k0}$.

Enstad elmélete is tartalmaz olyan közelítéseket, melyek túlméretezéshez vezetnek. Enstad ugyanis egyrészt a kis feszültségek tartományában lineáris függvénnyel közelíti a tönkremeneteli határgörbét, mely közelítés jelentősen eltérhet a valóságtól ([9] szerint), másrészt a garatbeli feszültségviszonyok meghatározása során a radiális feszültségmező elméletből indul ki, amelynek problémáiról már volt szó a boltozódási modellek általános tárgyalása során.

A következő táblázatban a kritikus siló kifolyónyílás méretek láthatók az előbbiekben bemutatott elméletek szerint, valamint [9] mérési eredményei. A méréseket és a számításokat egy $\alpha = 20°$-os, acéllemezből készült garattal végezték, melynél a kifolyónyílás mérete 0.05 métertől 0.4 méterig volt változtatható. A garat magassága 0.6 és 0.8 méter között változott, és fölé egy 1 méter magas párhuzamos falú részt helyeztek.

törési h.g.	*Jenike* lineáris	*Jenike* nemlineáris	*Enstad* lineáris	Mérés [9]
Kőpor	0.34	0.36	0.29	0.10 – 0.13
Gipsz	0.39	0.41	0.33	0.18 – 0.20
Szénpor	0.31	0.24	0.72	0.13 – 0.15
Cement	0.21	0.22	0.27	0.05 – 0.07

1.1. táblázat. Kritikus nyílásméret számított és mért értékei méterben [9] szerint.

Figyeljük meg a táblázatban látható mért és számított értékek közötti nagy eltéréseket. A fenti táblázat tekinthető a – szakirodalomban napjainkig fellelhető legjobb – boltozódási elméletek kritikájának. Az eddigieket megvizsgálva állíthatjuk tehát, hogy *a boltozódási folyamat analitikus eljárások felhasználásával történő modellezése napjainkig nem vezetett a gyakorlat számára elfogadható pontosságú eredményre.*

2. állítás. Véleményem szerint Jenike és Drescher boltozódási modellje a *nem alkalmazható a garat kinyitását követő pillanatra,* csupán akkor érvényes, amikor a már nyitott silóból kiáramló anyag a kifolyás közben kezd boltozódni.

A végeselem modellen végrehajtott számításaim eredménye szerint az (1.42) összefüggés által leírt, korábban radiális feszültségmezőnek nevezett feszültségeloszlás csak nyitott kifolyónyílás mellett elfogadható közelítés. Jenike és Drescher boltozódási modelljében pedig a szemcsés anyag tömörödését előidéző nyomófeszültség értékét a radiális feszültségmező (1.42) összefüggésével határozzák meg. Ebből következik, hogy a kifolyónyílás kinyitásának pillanatára a Jenike és a Drescher féle modell nem alkalmazható.

1.4.3. Drescher kísérleti vizsgálatai

Ebben a fejezetben [9] kritikus kifolyónyílás méretre vonatkozó méréseit kívánom röviden ismertetni.

Annak ellenére, hogy a szemcsés anyagok boltozódásának jelensége meglehetősen gyakori jelenség, a boltozódás folyamatának leírásához szükséges anyagjellemzőkről, azok meghatározásának módjáról, valamint a boltozódás szempontjából kritikus kiömlőnyílás- méretek értékéről kevés adat áll rendelkezésre a szakirodalomban.

Drescher cikkében igen részletes leírását találjuk egy, a fentiek meghatározásának érdekében végrehajtott méréssorozatnak. Drescher mérései során közepes méretű, ék alakú és kúpos modellsilók boltozódási tulajdonságait vizsgálta. A silók tölteteként mészkő-port, gipszet, szénport valamint cementet használt.

A kritikus kifolyónyílás méretek mérésére használt anyagok jellemzői az alábbi táblázatban láthatók.

Anyag	γ [kN/m^3]	ϕ_w [°]	ϕ [°]	A [kPa]	F [kPa]	q –	M –	Q [kPa]
Kőpor	12.92	34.0	45.5	0.41	0.10	1.89	0.13	3.29
Gipsz	12.85	38.2	54.1	0.38	0.10	1.60	0.37	3.05
Szénpor	6.00	26.5	48.7	0.25	0.04	1.93	0.11	3.82
Cement	14.45	35.0	51.8	0.5	0.10	1.90	0.18	3.72

1.2. táblázat. Drescher kritikus kifolyónyílás méréseihez használt anyagok jellemzői. [9].

A szimmetrikus, ék alakú garat körülbelül 0.15 m^3, míg a kúpos garat körülbelül 0.12 m^3 térfogatú volt. Az ék alakú garat 0.6 m széles és 0.7 m magas, 3 mm vastag acéllemezből készült oldalfalainak függőlegessel bezárt hajlásszöge $\theta_w = 10°$-tól $40°$-ig volt változtatható (1.7. ábra). Két, 20 mm vastag plexilapot helyeztek a garat elő- és hátoldalára, hogy a kialaku-

ló boltozatokat megfigyelhessék[3]. A garat felett 1 m magas részt képeztek ki a szemcsés anyag kihullásának megakadályozása érdekében.

$\theta_w = 20°$-os félkúpszögű kúpos garatból pedig több, különböző kiömlőnyílás méretűt készítettek. A kiömlőnyílás mérete 0.05 métertől 0.4 méterig míg a garat magassága 0.6 métertől 0.8 méterig változott. Ezek fölé a kúpos garatok fölé is elhelyeztek 1m magas hengeres részt.

Az így elkészített modellsilót bezárt kiömlőnyílás mellett feltöltötték szemcsés anyaggal, mely kb. 4 méternyi szabadesés után hullott bele a tárolóba, a futószalaggal történő feltöltés következtében.

Tíz perc várakozás után a kiömlőnyílást elzáró acéllemezt eltávolították és így a szemcsés anyag a tárolóból szabadon kiáramolhatott. A kísérleteket kis kifolyónyílással kezdték, amikor a halmaz még boltozódott, és az egymást követő mérések során a nyílást addig növelték, míg a boltozódás nélküli anyagkiáramlás le nem zajlott. Minden anyagtípusnál 10 kísérletet végeztek el, melyek eredményei a következő táblázatban láthatók.

Anyag	Garat				
	Ék alakú (θ_w)				Kúpos (θ_w)
	10°	20°	30°	40°	20°
Kőpor	0.12 - 0.15	0.10 - 0.13	0.12 - 0.15	0.15 - 0.17	0.25 - 0.28
Gipsz	–	0.18 - 0.20	–	–	–
Szénpor	–	0.13 - 0.15	–	–	0.23 - 0.25
Cement	–	0.05 - 0.07	–	–	0.10 - 0.13

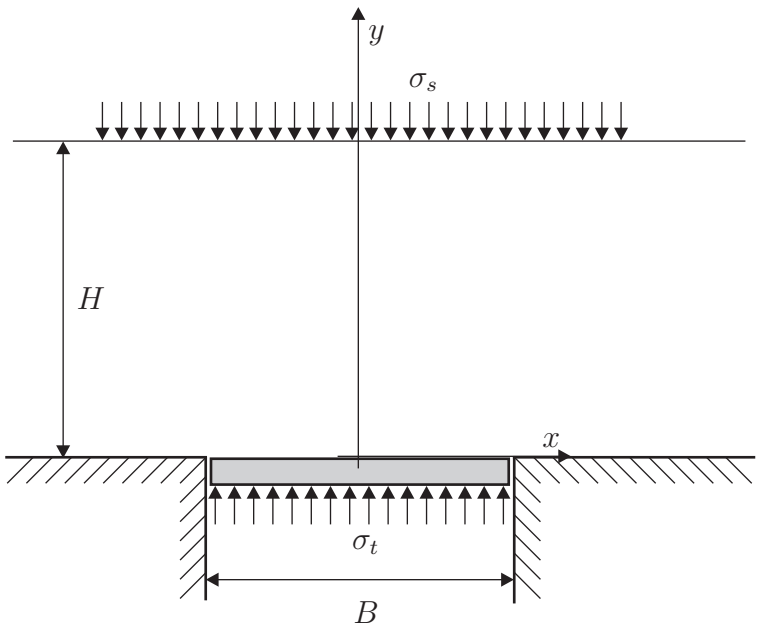
1.3. táblázat. Kritikus kifolyónyílás méretek méterben. [9].

1.4.4. Ono és Yamada modellje

A természetes boltozódás jelenségével nem kizárólag a szemcsés anyagok silóban történő tárolása esetén találkozhatunk. A talajszint alatti építmé-

[3]A mérési eredményeket közlő [9] cikkben a boltozat alakról mégsem tesznek említést.

nyekre ható nyomásviszonyok elemzése során sem hagyhatjuk figyelmen kívül a boltozódás hatását. Ono és Yamada [33] cikkében többek között *alagutak stabilitásvizsgálatát végzi*, a természetes boltozódás jelenségének figyelembevételével. A cikk elméleti és kísérleti úton kívánja meghatározni egy alagút oldalfalának megtartásához szükséges belső nyomás értékét. A cikk boltozódásvizsgálatok szempontjából fontos része az az eljárás, amelynek segítségével a szerzők kijelölik annak az anyagtartománynak a határát, melyen belül a feszültségviszonyok megváltoznak a boltozódási folyamat hatására.



1.12. ábra. Ono és Yamada boltozódási modellje.

Az 1.12. ábrán látható geometriai modellből kiindulva, lineárisan rugalmas, homogén, izotróp anyagmodellt használva vizsgálták meg a B szélességű zárólap elmozdításának hatását a szemcsehalmazbeli feszültségvi-

szonyokra.

Tönkremeneteli kritériumként az (1.9) Mohr–Coulomb-féle nyírási tönkremeneteli feltételt alkalmazták. Feltételezték, hogy zárólap középpontjában felvett origóból mérhető (r,θ) polárkoordináták függvényében vizsgált feszültségek r másodfokú függvényeként kifejezhetők, r együtthatói – amelyek θ függvényei – pedig a feszültségek kompatibilitási feltételeiből, valamint a peremfeltételekből határozhatók meg. A vízszintes (x) és függőleges (y) irányban keletkező feszültségek szerzők által feltételezett alakja:

$$\sigma_x = \gamma\left[\alpha H + r f(\theta) + \frac{r^2}{H}F(\theta)\right], \tag{1.74}$$

$$\sigma_y = \gamma\left[\beta H + r g(\theta) + \frac{r^2}{H}G(\theta)\right], \tag{1.75}$$

$$\tau = \gamma\left[\varepsilon D + r h(\theta) + \frac{r^2}{H}J(\theta)\right]. \tag{1.76}$$

A szerzők tehát r második hatványáig bezárólag közelítették a valóságban fellépő feszültségeket. Az 1.13. ábrán A val jelölt tartományon belül a szerzők az (1.74–1.76) összefüggések segítségével határozták meg a halmazbeli feszültségviszonyokat.

A szemcsehalmaz R-el jelölt tartományában a feszültségeket

$$\sigma_x = K_v\gamma(D-y), \tag{1.77}$$

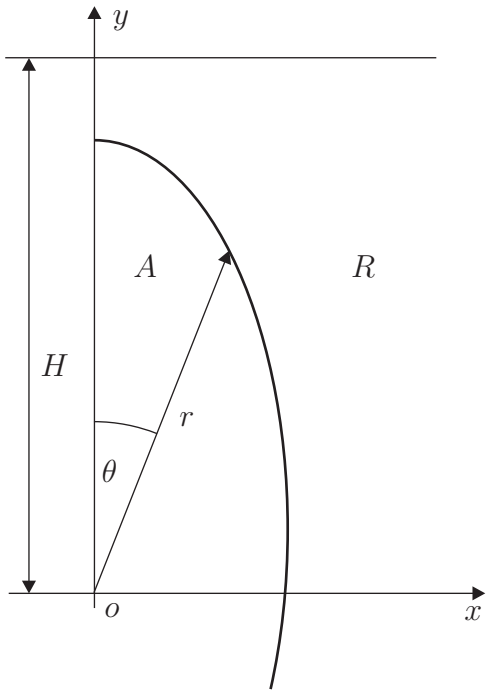
$$\sigma_y = \gamma(D-y), \tag{1.78}$$

$$\tau = 0 \tag{1.79}$$

alakúnak feltételezték, itt

$$K_v = K_0\left(1 - \frac{a}{1-\frac{y}{H}+b}\right), \tag{1.80}$$

K_0 a nyugalmi talajnyomás tényező, a és b pedig konstansok.



1.13. ábra. Az A és R tartományok pereme.

A szerzők egyik célja annak az A-val jelölt – a természetes boltozódás miatt módosult feszültségviszonyokkal leírható – tartománynak a kijelölése volt, amelyen belül az (1.74–1.76) egyenletek határozzák meg σ_x, σ_z és τ értékét.

Számításaik – amelynek részletei [33] cikkben olvashatók – ellipszis alakú határfelületere vezettek.

Ono és Yamada szerint a természetes boltozódás jelensége miatt módosult terhelési viszonyokkal jellemezhető tartomány kijelölhető a szemcsés halmazban. Eredményeik szerint ez a tartomány egy ellipszissel határolt része a halmaznak.

Ennek ismeretében a földfelszín alatt elhelyezkedő műtárgy méretezését az ellipszis alakú tartományban elhelyezkedő szemcsés anyag önsúlyából eredő terhelés figyelembevételével végzik.

Itt tehát nem a kritikus nyílásméret meghatározása, hanem pl. a föld alatti építmény terhelési viszonyainak az elemzése a cél.

Ono és Yamada modelljében a (1.74–1.76) differenciálegyenletek feltételezett alakjának kiválasztására nem találunk semmilyen mechanikai alapot. Így a határfelület alakjára meghatározott eredményeket csak kellő óvatossággal kezelhetjük. Önmagában is *fontos információt hordoz számunkra azonban az a megállapítás, hogy a boltozat környezetében a feszültségviszonyok eltérhetnek a halmaz többi részében kialakuló feszültségektől.*

Amennyiben a természetes boltozatoknak ezt a feszültségviszonyokat módosító hatását nem vesszük figyelembe az analitikus módszerrel végzett számításaink során, becsléseink nagymértékben eltérhetnek a valóságban lejátszódó jelenségből következő eredményektől. Részben ez is oka lehet az előző fejezet végén kiemelt nagy eltéréseknek, amelyeket a becsült és mért kritikus kiömlőnyílás méret között tapasztaltunk.

A természetes boltozat alakjának és terhelési viszonyainak meghatározásához tehát ismernünk kéne a kialakult természetes boltozat feszültségviszonyokat módosító hatását, azaz a boltozat alakját, még mielőtt a vizsgálatainkat elkezdtük volna. Ez látszólag egy olyan ellentmondás, melynek feloldására nincs lehetőségünk. Később látni fogjuk, hogy létezik megoldás ennek az ellentmondásnak a megszüntetésére, mégpedig a boltozat kialakulási folyamatot lépésről lépésre végigkövető algoritmus formájában, mely minden egyes lépésnél meghatározza a boltozat-alak változásának következtében lezajló feszültségviszony- változásokat.

2. KÍSÉRLETI VIZSGÁLATOK

2.1. Anyagjellemzők mérése

A természetes boltozódás mechanikai modelljének megalkotásához elengedhetetlen az anyagtulajdonságok meghatározása. A modellezéshez homogén, izotróp, lineárisan rugalmas kontinuum modellt alkalmaztam, ezért két anyagjellemző értékét kellett meghatároznom minden anyaghalmazra. Az egyik az anyaghalmaz rugalmassági modulusa E, másik pedig Poisson-tényezője, ν.

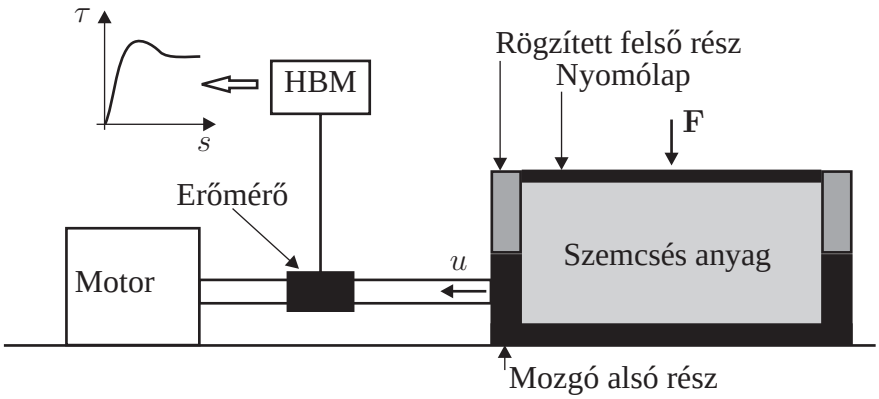
Mindkét anyagjellmező meghatározható a Mechanika és Műszaki Ábrázolás Tanszéken kifejlesztett valódi triaxiális berendezés segítségével.

Szemcsés anyagok mechanikai viselkedésének jellemzésére gyakran használjuk még az anyag belső súrlódási tényezőjét, valamint a kohéziót. Ezek ugyan nem tekinthetők anyagjellemzőnek mégis fontos információkkal szolgálnak a szemcsehalmazra vonatkozóan. Különösen a nyírási tönkremenetel fogalmának értelmezésekor lesz szükségünk ezen két jellemző értékére.

2.1.1. Anyag és tönkremeneteli jellemzők mérőeszközei

Nyírókészülék

A nyírókészülék segítségével egy az anyagminta belsejében, meghatározott sík mentén ható erőrendszert működtetve idézzük elő az anyagminta nyírási tönkremenetelét, miközben a mintára a nyírási síkra merőleges irányból állandó nyomóerőt biztosítunk. A készülék egy rögzített és egy mozgó keretrészből áll (lásd a 2.1. ábrát).



2.1. ábra. Nyíródoboz vázlata. A rajzon $\boldsymbol{F}$ jelenti a felső terhelést, u pedig az alsó lap elmozdulását.

A nyíródobozt az (1.9) összefüggésben megjelenő ϕ és c konstansok, a belső súrlódási szög és a kohézió mérésére használhatjuk [39].

A talajvizsgálatoknál alkalmazott [23] nyíródoboz módosított változatát alkalmaztam kísérleti vizsgálataimhoz [5]. Ennél a készüléknél a keret mozgott állandó sebességgel, és erőmérő cella segítségével mértem a nyírási síkban fellépő τ feszültségek legyőzéséhez szükséges oldalirányú erő értékét. Az általam használt berendezés abban tért el a szokásostól [39], hogy ennek a nyírókészüléknek az anyagminta tárolására szolgáló része nem henger alakú volt, mint a klasszikus berendezéseké, hanem téglatest

alakú minta nyírására adott lehetőséget.

A nyírókészüléknek két alapvető hibája van. Egyrészt a nyíródobozba töltött anyagban a doboz falán is nyomás keletkezik, ezért a feszültségi állapot nem egytengelyű. Ebből adódóan a tönkremeneteli feszültségi állapotot meghatározó Mohr-körök burkológörbéje nem azonos a mért nyomó- és nyírófeszültségek által meghatározott pontokon átfektetett egyenessel. Ez a belső súrlódási szög szempontjából kisebb, a kohézió szempontjából nagyobb eltérést jelent. Másrészt a normálerő ráadásakor sem jön létre egyenletes nyomáseloszlás, de a nyírási folyamat megindulásakor, a feszültségátrendeződések eredményeként a nyomáseloszlás bizonyosan egyenetlenné válik, míg az értékelésnél a csúsztató feszültséget egyenletes feszültségeloszlás feltételezésével számoljuk.

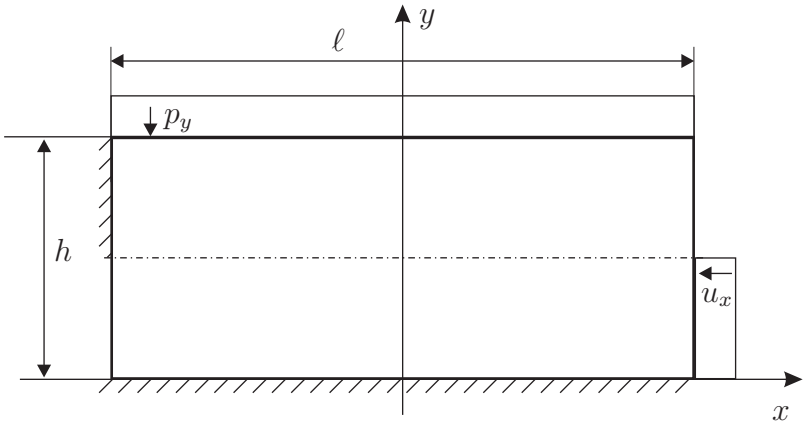
Fontos arra ügyelnünk tehát, hogy a τ csúsztatófeszültség eloszlás a nyíródoboz belsejében nem konstans.

A csúsztatófeszültség-eloszlás vizsgálatához elkészítettem a nyírókészülék végeselem modelljét. A modell egy, a nyírókészülék geometriai adataival egyező keresztmetszetű, h magasságú, ℓ szélességű téglalap alakú tartomány volt, melynek a rajz síkjára merőleges irányú kiterjedését végtelennek tekintettem. A 2.2. ábrán látható a készülék mechanikai modellje. Lineárisan rugalmas, homogén, izotróp anyagmodellt alkalmaztam, a peremfeltételek az ábráról leolvashatók. Terhelésként a jobb alsó rész előírt u_x elmozdulását adtam meg.

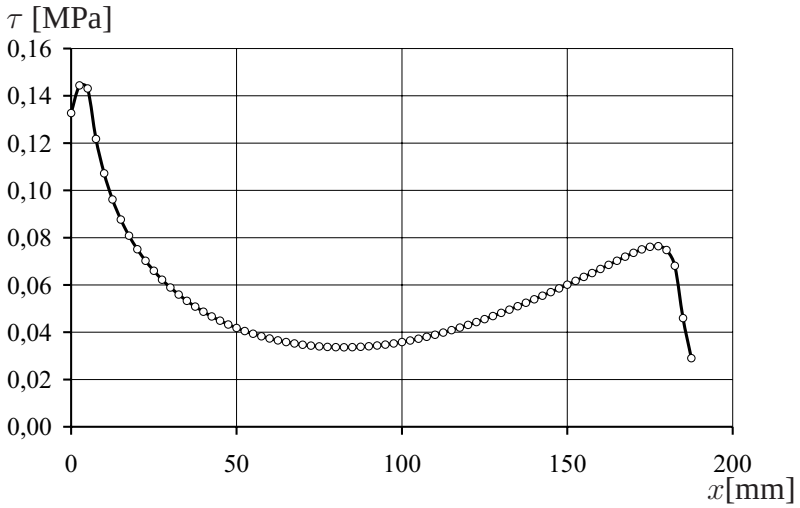
A végeselem modellel meghatározott feszültségeloszlás – a gyakorlatban tett feltételezésekkel ellentétben – nem konstans (2.3. ábra).

A csúsztatófeszültség-eloszlás nemlinearitásból következik, hogy a csupán $\tau_{\text{max}} = \frac{F_{\text{max}}}{A}$ összefüggésből számított maximális csúsztatófeszültség értéket alkalmazva a c kohézió és ϕ belső súrlódási szög értékének meghatározására, jelentős hibát vétünk. Ilyenkor ugyanis egy τ_{a} átlagos csúsztatófeszültség értéket számítunk.

3. állítás. *A τ_a átlagos csúsztatófeszültség alkalmazása a kontinuumelem terhelhetőségének alulbecslését eredményezi.* Ezenkívül a nyírodobozzal



2.2. ábra. Nyíródoboz mechanikai modellje.



2.3. ábra. Csúsztatófeszültség eloszlás a nyíródoboz középvonalában, a berendezés x hossza mentén.

meghatározott c kohézió és ϕ belső súrlódási szög értéke is kérdésessé válik mindaddig, míg a τ_{a} átlagos csúsztatófeszültség értékét alkalmazzuk a nyírási kísérletek kiértékelése során.

Az átlagos τ_{a} csúsztatófeszültség az eredeti feszültségeloszlásból meghatározható a

$$\tau_{\mathrm{a}} = \frac{1}{A} \int_A \tau(x, y) \mathrm{d}A \tag{2.1}$$

összefüggés segítségével, ahol x, y a nyírás síkjában felvett koordinátarendszerben mért koordinátákat jelöli, A pedig a nyírt felület. A τ_{a} átlagértéket szokás annak a kritikus csúsztatófeszültség értéknek tekinteni, amely egy kontinuumelem környezetében a nyírási tönkremenetel megindulását okozza.

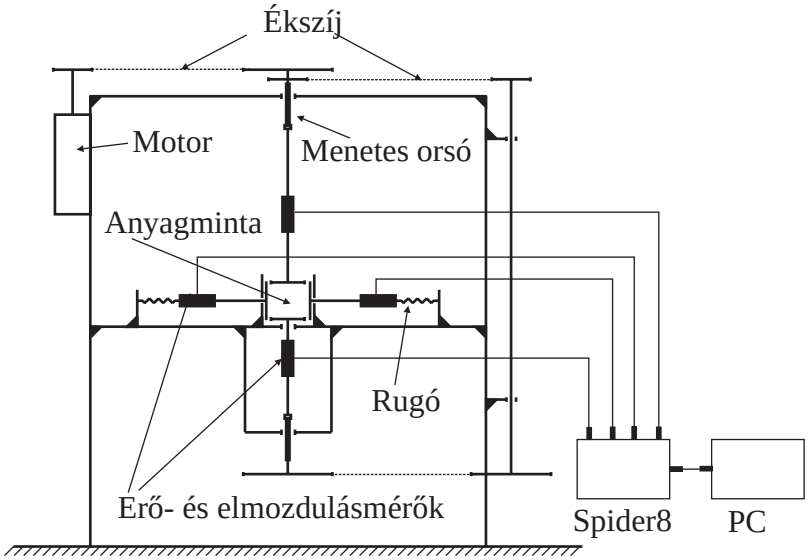
Az így számolt kritikus csúsztatófeszültség azonban sokkal kisebb, mint a valóságban fellépő feszültség. Ebből pedig a terhelhetőség alulbecslése következik.

Valódi triaxiális berendezés

A Mechanika és Műszaki Ábrázolás Tanszéken készített valódi triaxiális berendezés segítségével a szemcsehalmazból kiemelt hasáb alakú próbatest terhelési viszonyait a silóbeli viszonyokhoz nagyon hasonlóan valósíthatjuk meg [6].

Míg a klasszikus triaxiális berendezésben az anyagmintára ható oldalnyomás szabályozott (állandó), addig a valódi triaxiális berendezés az oldalirányú megtámasztás merevségének szabályozhatóságát (állandóságát) biztosítja.

Másik, csekély eltérés a klasszikus és a valódi triaxiális berendezés között, hogy a klasszikus triaxiális berendezés hengeres anyagmintájával ellentétben a valódi triaxiális berendezésben hasáb alakú anyagmintát terhelünk. A berendezés vázlata a 2.4. ábrán látható.



2.4. ábra. A valódi triaxiális berendezés vázlata.

A triaxiális berendezésbe helyezett hasáb alakú anyagmintára **F** függőleges terhelés hat, miközben a felső és az oldalsó lapok elmozdulását mérjük.

Az új készülék használata esetén a halmazban az oldalfalnál nemcsak nyomás, hanem a mozgások miatt terhelő erő irányú súrlódó erő is keletkezik, ami a homogén feszültségállapotot megváltoztatja, *hibát okoz a kiértékeléskor*. Ezt a hibát kétféleképpen csökkenthetjük. Egyrészt a támasztó felületekre felvitt súrlódáscsökkentő bevonattal, így a súrlódó erő minimális. Másrészt a készülék alsó nyomólapja szintén mozog a terhelés irányában, de a terhelő lapnál kisebb sebességgel. Így a teljes halmaz egy lassú mozgással lefelé mozog, ami a mozgó súrlódást biztosítja, ezzel is csökkentve, és a terhelés irányában közel állandó értéken tartva a súrlódó erőt. Az alsó nyomólapon is mérhető az erő és ezzel a súrlódó erő mérése és figyelembe vétele is lehetséges.

A szemcsehalmazbeli terhelési viszonyok pontos modellezése érdekében módosítanom kellett a triaxiális berendezés felépítését. A korábban alkalmazott nagy merevségű oldalirányú megtámasztások helyett cserélhető, különböző rugómerevségű rugókat használtam. A halmaznál nagyobb merevségű rugók alkalmazásával modellezni tudtam a fal mellett elhelyezkedő anyagminta feszültségviszonyait, míg a halmaz merevségéhez közel álló rugómerevségű megtámasztással a halmaz belsejében kialakuló feszültségviszonyokat modelleztem.

2.1.2. Anyag- és tönkremeneteli jellemzők mérése

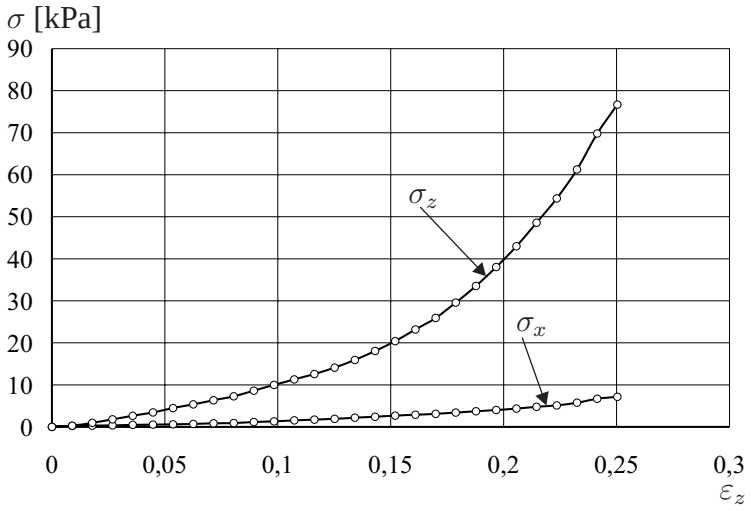
A természetes boltozódási folyamat modellezéséhez szükségünk van a vizsgált anyaghalmazok mechanikai tulajdonságainak ismeretére. Ez jelenti egyrészt az anyagtulajdonságokat, másrészt a tönkremeneteli jellemzőket.

Anyagállandók meghatározása

A lineárisan rugalmas anyagmodell anyagállandóinak meghatározása a valódi triaxiális berendezés segítségével elvégezhető. Kiemelkedő fontosságúak Huszár, Balássy és Csizmadia ezzel kapcsolatos kísérleti vizsgálatai [6].

A triaxiális berendezés felső nyomólapját egyenletes sebességgel mozgatva az elmozdulás függvényében növekvő értékű F_z erőt vittem fel terhelésként az anyagmintára. Az F_z erő értékének és a nyomólap felületének ismeretében a σ_z függőleges feszültség értéke számítható. Függőleges irányban mért feszültség (σ_z), valamint oldalirányban mért feszültség (σ_x) látható a függőleges irányú fajlagos nyúlás (ε_z) függvényében a 2.5. ábrán.

A nyomólap lefelé haladásának következtében az összetömörödő szemcsehalmaz oldalirányban erőt fejt ki a triaxiális berendezés oldallapjaira. Ezt a két, egymásra merőleges irányban keletkező erőt, és az oldallapok elmozdulását mértem. Méréseim szerint a két oldalirányú erő – eltekintve az oldallapoknál fellépő súrlódás hatásától – egyenlő, amint az izotrópia



2.5. ábra. Triaxiális vizsgálat. Függőleges irányban mért feszültség (σ_z), valamint oldalirányban mért feszültség (σ_x) a függőleges irányú fajlagos nyúlás (ε_z) függvényében (három mérés átlaga). Anyag: gipsz por.

esetén elvárható. Az oldallapoknál mért erőből (figyelembe véve a lefelé mozgó nyomólap miatt bekövetkező oldalirányú felületcsökkenést) a $(\sigma_x = \sigma_y)$ feszültségek értéke meghatározható.

Mivel ilyen terhelési viszonyok és anyagminta elhelyezés esetén az anyagminta belsejében – középpontjában – elképzelt kontinuumelemre nézve az előbbiekben méréssel meghatározott feszültségek főfeszültségeknek tekinthetők, az anyagegyenletek felhasználásával a halmaz látszólagos rugalmassági modulusa meghatározható, hiszen az

$$\sigma_z = \frac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu}\left(\varepsilon_z + 2\varepsilon_x\right)\right], \tag{2.2}$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu}\left(\varepsilon_z + 2\varepsilon_x\right)\right] \tag{2.3}$$

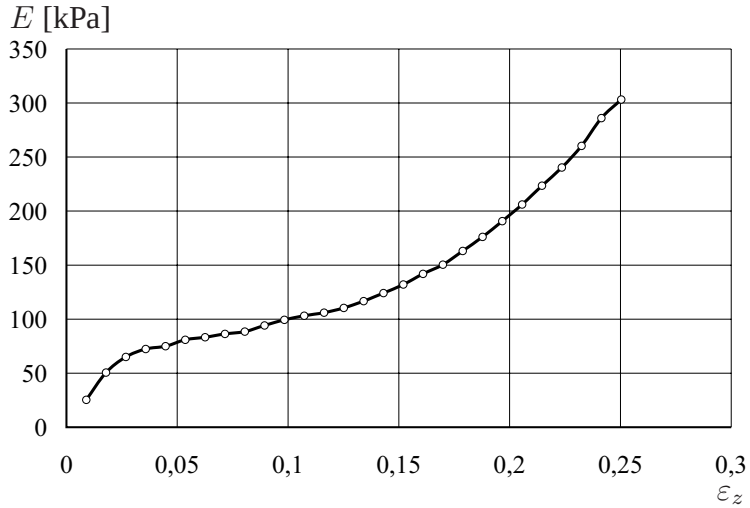
egyenletekből E és ν kifejezhető. A két anyagjellemző triaxiális beren-

dezéssel történő meghatározására szolgáló összefüggések, a (2.2)-ból és (2.3)-ből kifejezve a mért σ_x és σ_z ismeretében:

$$E = \frac{\sigma_z^2 - 2\sigma_x^2 + \sigma_x \sigma_z}{\varepsilon_z \left(\sigma_x + \sigma_z\right) - 2\varepsilon_x \sigma_x}, \tag{2.4}$$

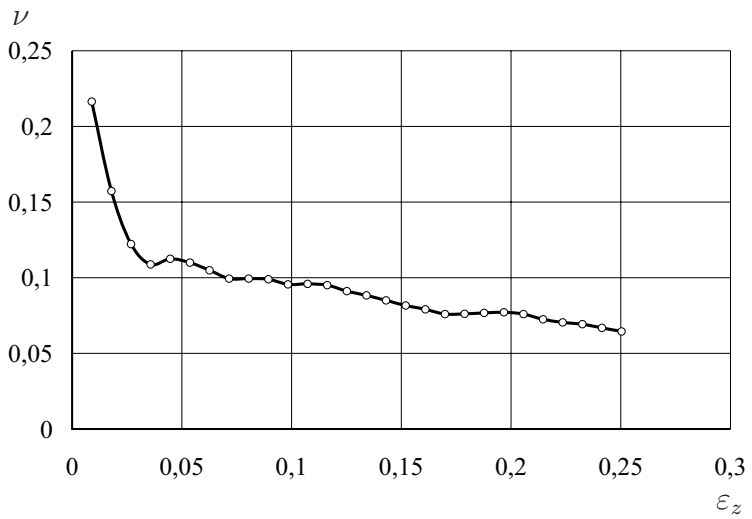
$$\nu = \frac{\varepsilon_z \sigma_x - \varepsilon_x \sigma_z}{\varepsilon_z \left(\sigma_x + \sigma_z\right) - 2\varepsilon_x \sigma_x}. \tag{2.5}$$

A 2.5. ábrán látható, hogy méréseim szerint a függőleges feszültség értéke a nyomólap z elmozdulásának függvénye. Ennek következtében a halmaz E rugalmassági modulusa és ν Poisson tényezője nem állandó. A (2.4) és (2.5) összefüggéseket felhasználva meghatározható E és ν változása az anyagminta összenyomásának függvényében (2.6. és 2.7. ábrák).



2.6. ábra. Gipsz por látszólagos rugalmassági modulusának függése a por tömörödésétől.

A rugalmassági modulus változásának jellegét tekintve felvetődik a homogén, lineáris anyagodell alkalmazhatóságának kérdése. Végeselem



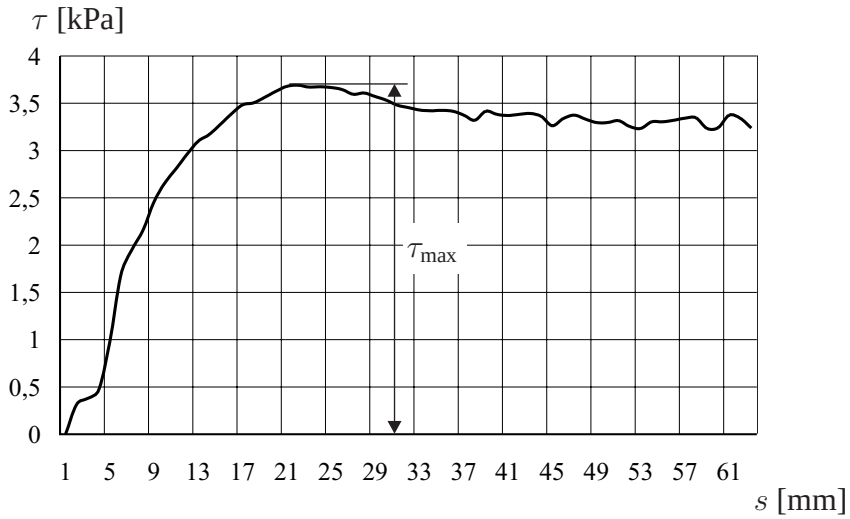
2.7. ábra. Gipsz por Poisson tényezőjének függése a por tömörödésétől.

módszerrel végzett számításaim azt mutatták, hogy a siló talppontjában számított feszültség értékek nem érzékenyek számottevően a rugalmassági modulus értékének – a digramon látható értéktartományon belüli – változására. A természetes boltozódás modellezése szempontjából a garatbeli feszültségviszonyoknak van döntő hatásuk. Számításaim során úgy tekintettem, hogy a halmazban mindenütt azonos – a garat talppontjában, a $\rho g H$ hidrosztatikus feszültségből számítható tömörödéshez tartozó – értékű a rugalmassági modulus és a Poisson tényező értéke.

Nyírási tönkremenetel vizsgálata

Elsőként a nyírási tönkrementeli tulajdonságok leírására szolgáló c kohéziót és ϕ belső súrlódási szöget határoztam meg, nyíródoboz segítségével.

Különböző függőleges terhelések mellett mértem a nyíródoboz alsó lapjának vízszintes elmozdításához szükséges erőt. Egy ilyen erő – elmozdulás diagram látható a 2.8. ábrán.

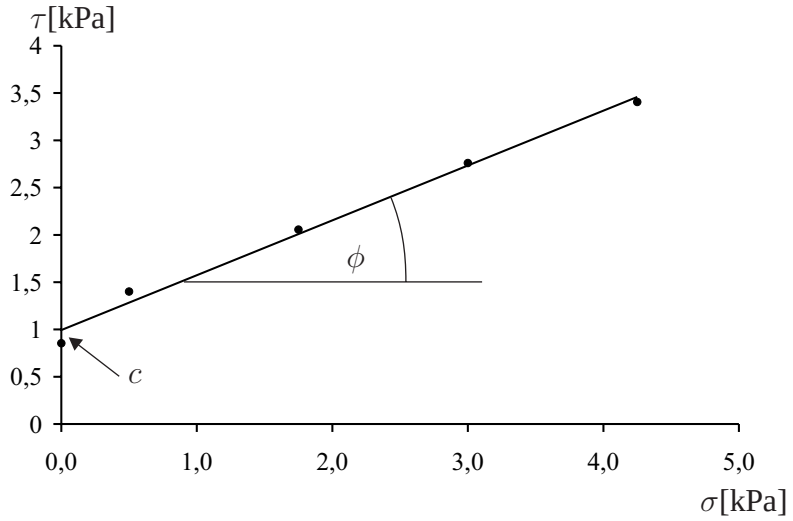


2.8. ábra. 3% nedvességtartalmú homok csúsztatófeszültség – elmozdulás diagramja. Függőleges terhelés $\sigma = 4.25$ kPa.

A különböző függőleges terhelésekből számított σ feszültségekhez tartozó csúsztatófeszültség-maximumokat közös diagramban ábrázoltam (2.9. ábra), az így kapott pontsorozatra illesztett egyenes lett az anyaghalmaz tönkremeneteli határgörbéje. Az egyenes meredeksége adja a halmaz ϕ belső súrlódását, függőleges tengelymetszete pedig a c kohézió értékét.

A kapott eredmények közelítő értékek, figyelembe véve a 3. állításban foglaltakat.

A csúsztatófeszültség-maximumok kijelölése különösen a kis előterhelés értékek környezetében bizonytalan, mert a feszültség-elmozdulás diagramon ilyenkor nem olyan tisztán kivehető a maximum érték, mint a 2.8. ábrán.



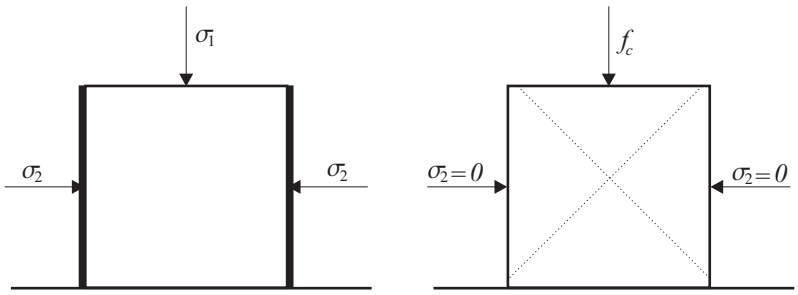
2.9. ábra. Belső súrlódás és kohézió mérése nyíródobozzal. Anyag: 3% nedvességtartalmú homok.

Tönkremenetel kéttengelyű feszültségállapotban

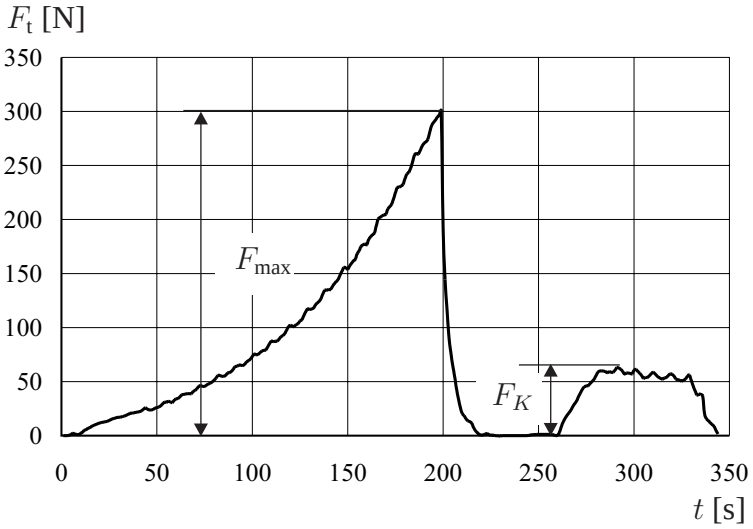
A mérés során a triaxiális vizsgálóberendezésbe helyezett anyagmintát terheltem adott σ_1 feszültséghez tartozó nyomóerővel (2.10. ábra), miközben az oldalirányú megtámasztás miatt keletkező, az ábrán σ_2-vel jelölt feszültségek akadályozzák meg a szemcsehalmaz összeomlását.

Ezután megszüntettem a terhelést, és szabaddá tettem az anyagminta egyik oldalát, majd kezdtem újra ráhelyezni a függőleges terhelést, egészen a szemcsehalmaz összeomlásáig. Tulajdonképpen az előterhelés felvitelével létrehoztam egy „új” anyagot, amelynek a tönkremenetelét vizsgáltam kéttengelyű feszültségállapotban. A 2.11. ábrán látható egy kéttengelyű feszültségállapothoz tartozó tönkrememeteli feszültség meghatározására szolgáló vizsgálatnál az előterhelés $(F_{\max})$ értéke és az oldalfal eltávolítása után a halmazra felvihető maximális terhelés (F_K) értéke.

Rögzítettem a tömörítéshez tartozó feszültségértéket, valamint az adott

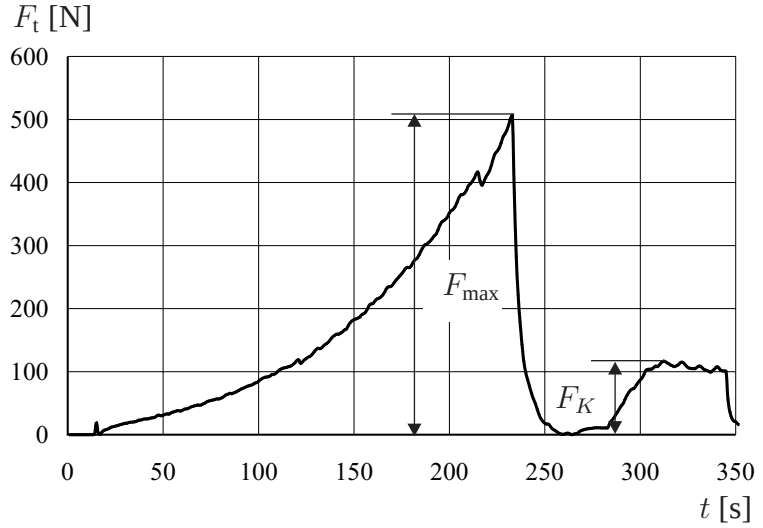


2.10. ábra. Kéttengelyű feszültségállapothoz tartozó tönkremeneteli határgörbe felvétele triaxiális vizsgálattal.



2.11. ábra. 3% nedvességtartalmú homok kéttengelyű feszültségállapothoz tartozó tönkremeneteli határfeszültségének mérése.

tömörítéshez tartozó tönkremenetelt okozó feszültséget. A kísérletet megismételtem különböző tömörítő–feszültség értékek mellett. (Lásd a 2.11, 2.12. ábrákat.)



2.12. ábra. Kéttengelyű feszültségállapothoz tartozó tönkremeneteli határfeszültség mérése.

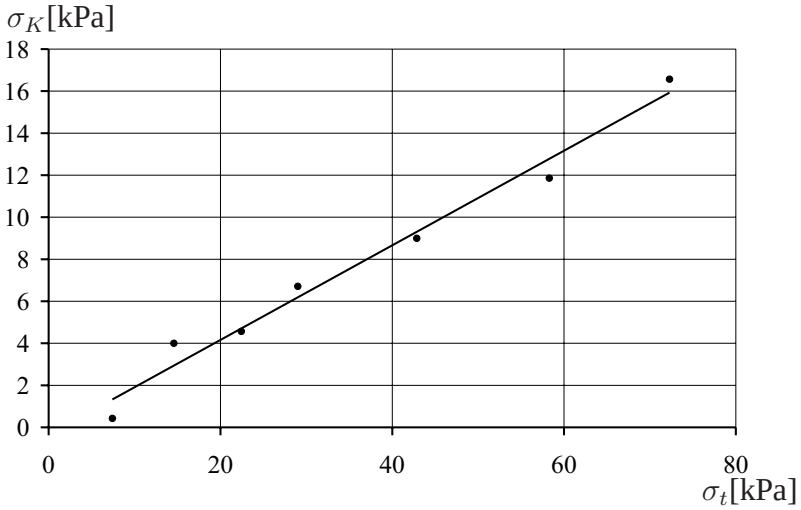
A vizsgálat során kapott mérési pontokra illesztett függvény (2.13. ábra) grafikonját neveztem a *kéttengelyű feszültségállapothoz tartozó tönkremeneteli határgörbének.*

Ha a tönkremenetelhez tartozó feszültségértéket σ_K-val jelöljük, akkor a tönkremeneteli határgörbét a

$$\sigma_K = F_F(\sigma_t) \tag{2.6}$$

egyenlettel adják meg.

Az 2.13. ábrán bemutatott tönkremeneteli határgörbe megfelelő pontossággal közelíthető a (1.59) egyenlet segítségével, amennyiben az ott szereplő konstansok a következők: $M = 0.23$, $Q = -0.35$. A $Q = -0.35$ értéknek nincs fizikai értelme, így az illesztést módosítottam úgy, hogy az egyenes az origón menjen át. Ebben az esetben $M = 0.22$ értéket kaptam az egyenes meredekségére. F_F ugyanúgy anyaghalmazra jellemző, mint pl. a



2.13. ábra. 3% nedvességtartalmú homok kéttengelyű feszültségállapothoz tartozó határfeszültsége az előtömörítő feszültség függvényében.

belső súrlódási szög.

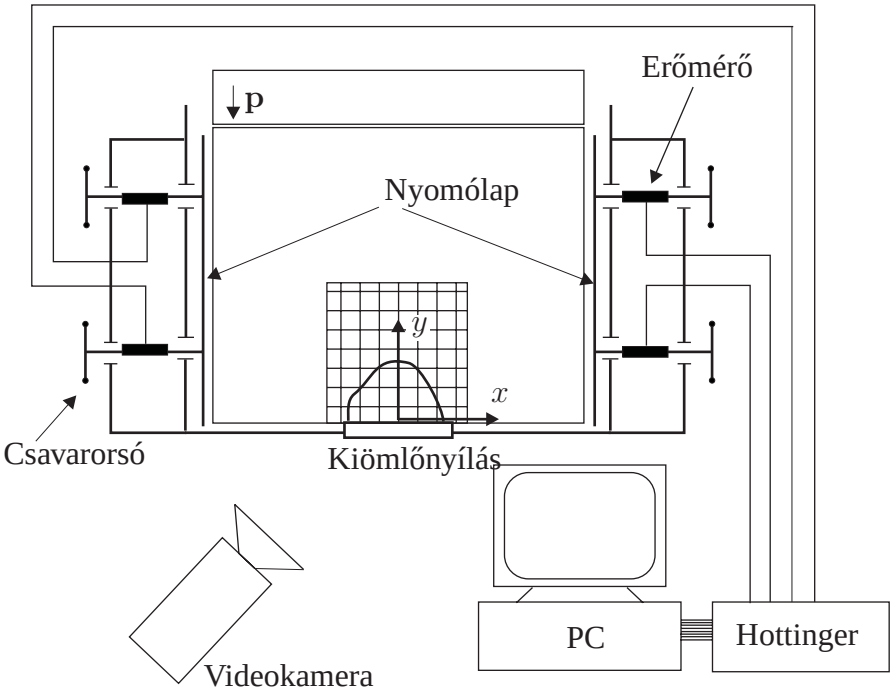
F_F-et Jenike *folyási függvény*nek nevezi [19]. A Jenike által F_F mérésére megadott eljárás azonban eltér az általam alkalmazottól. Az általam alkalmazott módszer pontosabban modellezi a halmazban lejátszó folyamatokat, a valódi triaxiális berendezéssel kapcsolatosan korábban leírt megjegyzések miatt.

2.2. A boltozódási folyamat kísérleti vizsgálata

2.2.1. Boltozódásvizsgáló berendezés

A boltozódási folyamatok valamint a boltozat alakjának vizsgálatához készült boltozódásvizsgáló berendezés vázlata látható a 2.14. ábrán. A be-

rendezésben elhelyezett anyagminta függőleges terhelése súlyokkal hozható létre. Oldalirányú nyomóerőket csavarorsók segítségével vittem fel a szerkezetre.



2.14. ábra. Boltozódásvizsgáló berendezés.

Vizsgálataim során nedves homokot terheltem különböző felső és oldalsó nyomással.

A terhelési viszonyokat minden esetben úgy állítottam be, hogy a függőleges és oldalirányú nyomások aránya a silókban keletkező nyomásarányokhoz közel legyen.

A terhelés felvitele után a kifolyónyílás méretét növeltem az első természetes boltozat kialakulásáig. A boltozat kialakulás folyamatát video-

kamera segítségével rögzítettem. Ezután a kifolyónyílást tovább növeltem, míg a boltozat össze nem omlott. Az összeomlás folyamatát is videóra rögzítettem.

2.2.2. Boltozat kialakulás és tönkremenetel

4. állítás. Kísérleteim során bebizonyosodott, hogy kohézió nélküli anyagok – az általam létrehozott (és a silóbeli értékekhez közeli) terhelési viszonyok mellett – nem boltozódnak. Az anyaghalmaz kohéziója tehát a boltozódási kísérlet kimenetelére fontos hatással bíró faktornak bizonyult.

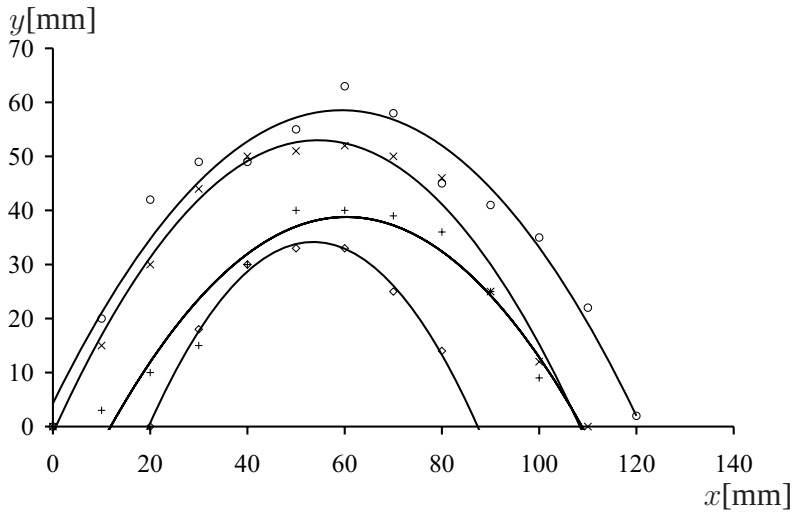
A felső és oldalsó terhelés arányának szerepét is megvizsgáltam, és azt tapasztaltam, hogy a kritikus nyílásméret értékére ez az arány hatással van. Miután azonban a silóbeli terhelési viszonyok modellezésére törekedtem, ezt az arányt meglehetősen szűk intervallumon belül kellett tartanom, hiszen [38] szerint $0.3 < \lambda = \frac{\sigma_h}{\sigma_v} < 0.6$.

5. állítás. Megállapítottam, hogy a természetes boltozatok jellemzésére alkalmazható vizsgálati paraméterek: a boltozati magasság és szélesség aránya valamint a maximális boltozat-szélesség, vagy másnéven kritikus nyílásméret.

6. állítás. A boltozódásvizsgáló berendezésben kialakult természetes boltozatok alakja vizsgálataink szerint parabolával jól közelíthető[1] (2.15. ábra).

Fontos ehhez azonban hozzátenni azt, hogy a stabil természetes boltozatok alakjának meghatározásához figyelembe kellett vennem azt a tényt, a boltív nem közvetlenül az anyaghalmaz határán helyezkedik el. A természetes boltozat határán ugyanis kialakult egy átmeneti zóna, mely nem vett részt a boltozat feletti anyagtömegekből eredő terhelések elviselésében.

[1] Oldal István tudományos diákköri munkája (amelynek témavezetője voltam) keretében végzett boltozódásvizsgálatok alapján.



2.15. ábra. Különböző kifolyónyílás méretekhez tartozó természetes boltozatok alakja.

Ezt a boltozatok stabilitásának vizsgálata során tapasztaltam, amikor az átmeneti zóna eltávolítása a boltozat teherbírását, stabilitását nem befolyásolta.

Kísérleteink során bebizonyosodott, hogy a boltozódás jelenségének lefolyása jelentősen függ a boltozódásvizsgáló berendezés feltöltésének módjától is. Törekednem kellett arra, hogy ugyanolyan módon töltsem fel a berendezést szemcsés anyaggal, a homogenitás megőrzése érdekében. A feltöltés különbözőségéből adódó helyi tömörség-változások jelentősen megváltoztatták a természetes boltozatok alakját.

Azt a következtetés vonhattam le tehát, hogy a boltozódási tulajdonságok (és az anyagtulajdonságok) a szemcsehalmaz tömörségétől, és annak eloszlásától is függenek.

A videofelvételek (2.16. ábra) szerint a természetes boltozatok mindig a nyílás feletti környezetben található anyagrészek kihullásával alakul-

tak ki. A keletkező boltívek a külső zavaró hatásokkal (ütögetés, kisebb anyagrészek eltávolítása a boltív pereméről) szemben meglehetősen stabilnak mutatkoztak. Az összeomlást előidéző repedések a boltív talppontjából indultak ki, és ezek hatására egymás után több, rövid ideig öntartó boltozat alakult ki, majd egy kritikus nyílásméret elérésével a természetes boltozatok összeomlása az anyag kiömléséhez vezetett.

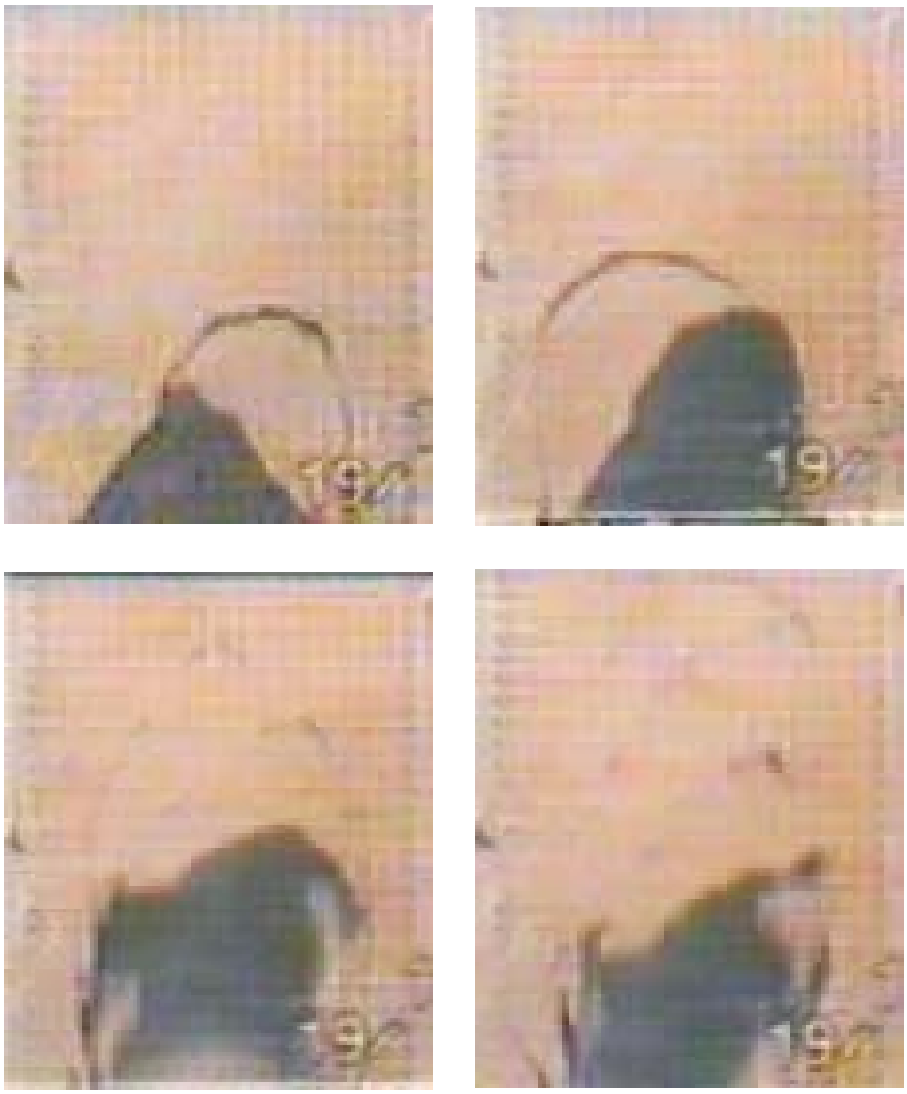
A boltozódásvizsgáló berendezés (2.14. ábra) segítségével végzett méréseim során a terhelés felvitele után a kifolyónyílás méretét növeltem az első természetes boltozat kialakulásáig.

Az első stabil boltozat kialakulása után a kifolyónyílás méretét tovább növeltem, ennek során a boltozatok több lépésben, egyre nagyobb méretűvé váltak, míg végül elértem a kritikus nyílásmérethez tartozó utolsó stabil boltozatot. Egy-egy ilyen stabil boltozat látható az 2.17. és 2.18. ábrán.

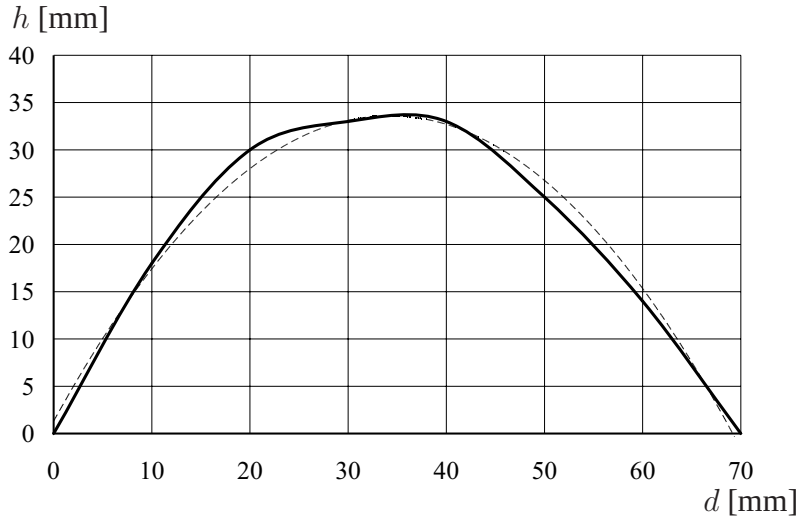
Egymás után elvégzett több mérés eredményeként ugyan meglehetősen különböző boltozat alakokat kaptunk, nem szabad azonban elfelednünk, hogy a kohézió miatt megtapadó anyagdarabok miatt a „valódi” boltozat nem látható. Csak a kritikus nyílásméret értéke használható fel, mint egyértelmű és kellő pontosságú eredmény.

Az ábrákon láthatóak a látszólagos alakra illesztett parabolák is, az illesztés szemmel láthatóan elfogadható eredményre vezet. Az illesztés pontosságát matematikailag elemezni – a megtapadt anyagrészek zavaró hatása miatt – nem érdemes.

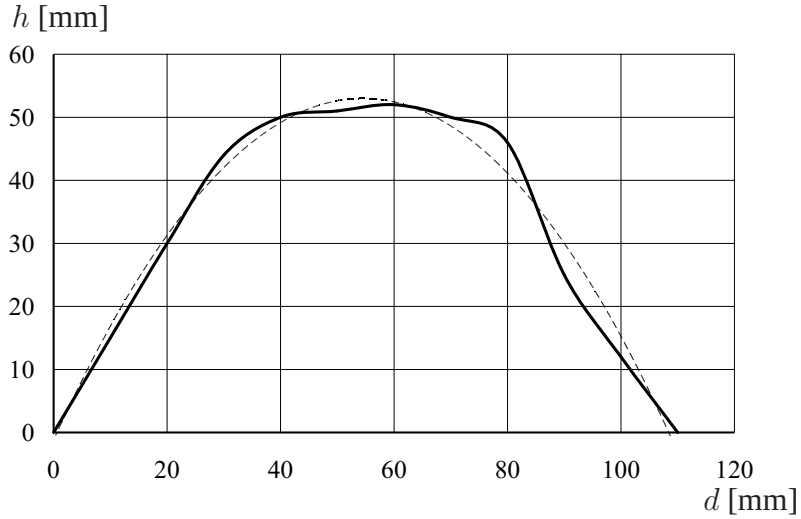
Boltozódással kapcsolatos kísérleti vizsgálataim elsősorban a boltozat kialakulás és tönkremenetel folyamatának elemzésére valamint a kritikus nyílásméret nagyságának meghatározására irányultak.



2.16. ábra. Fényképfelvételek a boltozat létrejöttéről és tönkremeneteléről. A képkockák videofelvételből lettek kivágva, ez a rossz minőség oka.



2.17. ábra. 70 mm-es kiömlőnyílásnál megjelenő első stabil boltozat alakja.



2.18. ábra. 120 mm-es kiömlőnyíláshoz tartozó boltozat alakja.

3. A TERMÉSZETES BOLTOZÓDÁS MODELLJE

A természetes boltozódás folyamatának leírásával próbálkozó, szakirodalomban fellelhető analitikus megoldások kudarca azt mutatja, hogy az ilyen jellegű megoldások keresése nem célravezető. A jelenség analitikus úton történő kezelhetőségének biztosításához túl sok önkényes, mechanikailag nem indokolható feltételezéssel kell élni.

7. állítás. A boltozódás szempontjából kritikus nyílásméret számított és mért értékeinek összevetése ad lehetőséget az elméleti vizsgálatok és a valóságban lejátszódó fizikai folyamat összevetésére.

A jelenség kísérleti úton történő vizsgálata során ugyanis nem vagyunk képesek a halmazbeli feszültségviszonyokat mérésekkel (elfogadható pontossággal) meghatározni, ezért a természetes boltozódás korábban bemutatott analitikus modelljeiben a feszültségviszonyok számítására tett feltételezések nem is ellenőrizhetők. A boltozat-alak nyomonkövetése sem egyértelmű feladat, mint azt korábban, kísérleti vizsgálataim során tett megjegyzéseim jelezték. Egyetlen dolog van, amit viszonylag könnyen mérhetünk, ez a kritikus nyílásméret.

Vizsgálataim azt mutatják, hogy a boltozódás folyamatának nyomonkövetésére nem emelhetjük ki a halmazból önkényesen pusztán a boltozat környezetét. A természetes boltozódás definíciója módosításra szorul.

16. definíció. *Természetes boltozódásnak* nevezem a szemcsés halmaznak azt az egyensúlyi állapotát, amikor a szemcsés anyag nem áramlik ki a tárolására szolgáló berendezésből a nyitott kifolyónyíláson keresztül. A természetes boltozat kialakulása a halmazt alkotó kontinuumelemek és a tároló falainak egymásra hatása során kialakult, az egész halmazra jellemző egyensúlyi állapot létrejötte.

Ilyen megközelítés esetén pusztán néhány természetes kikötést kell tennünk a halmaz peremén jelentkező feszültségekkel kapcsolatban, a perembe beleértve a természetes boltozattal határolt anyagtartományt is. A boltozat kialakulás valamint összeomlás folyamata egyértelműen, mechanikai alapelvekből kiindulva meghatározott – és mérhető – feltételek figyelembevételével modellezhető.

3.1. Boltozódás lapos fenekű tartályokban

A szakirodalomban kevés kísérletet látunk a lapos fenekű tartályokkal kapcsolatos vizsgálatokra. Ennek oka részben az, hogy szemcsés anyagok tárolására a gyakorlatban ilyeneket ritkán használnak. Ugyanakkor azonban geotechnikai vizsgálatok során ez a jelenség is fontos (lásd [33]).

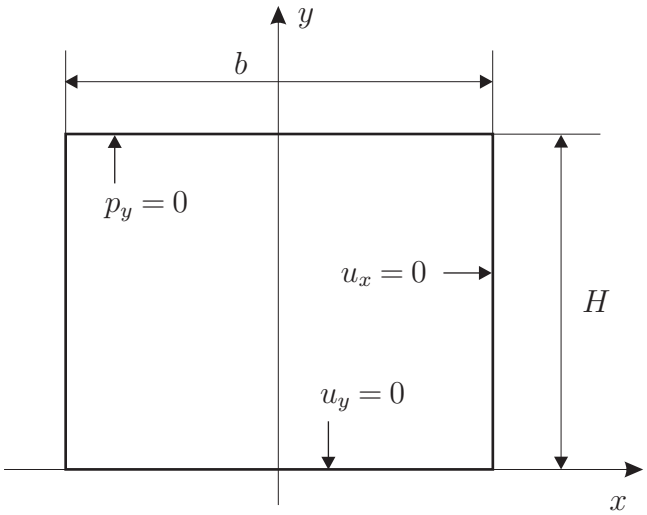
A kúpos kiömlőnyílásokra felépített, Jenike [19] által kidolgozott eljárás nem alkalmas a jelenség leírására.

Amennyiben a jelenséget a teljes halmazra vonatkozó egyensúlyi feladatként kívánjuk kezelni, akkor ebben az esetben lesz a legkevesebb korlátozási feltételünk, tehát ez a legegyszerűbben megoldható boltozódási probléma.

A lapos fenékre kidolgozott eljárást a későbbiekben – a szükséges módosításokkal – kúpos tartályfenék esetére is alkalmazom.

3.1.1. A természetes boltozat kialakulása

A szemcsehalmazban kialakuló feszültségviszonyok tisztázása érdekében elkészítettem egy siló leegyszerűsített mechanikai modelljét. A geometriai modell egy a vizsgálati síkra merőleges irányban végtelen kiterjedésű téglalap alakú tartomány. A tartomány oldalsó és alsó peremén a lineárisan rugalmas kontinuumként modellezett szemcsés anyagnak a határoló felület normálvektorának irányába való elmozdulási lehetőségeit megakadályoztam (3.1. ábra). Lapos tartályfenék esetében feltételezem, hogy a boltozódás szempontjából fontos halmazrész a falaktól nagy távolságra helyezkedik el, így a falsúrlódás hatása elhanyagolható.



3.1. ábra. „Modellsiló” rajza.

Az anyaghalmazban kialakuló feszültségi tenzormező és a halmazban kijelölt kontinuumelemekre ható, a szemcsés anyag önsúlyából keletkező térfogati terhelés közötti kapcsolatot kifejező egyensúlyi egyenletek:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y = 0. \tag{3.2}$$

Az elmozdulási tenzormező és az alakváltozási tenzormező között fennálló kapcsolat megfogalmazásához feltételeztem, hogy az elmozdulásmező a tartomány bármely pontjában kellő pontossággal közelíthető az elsőrendű tagokig történő Taylor-sorfejtéssel. Ekkor a kontinuum alakváltozási tenzormezője – mint ismeretes – az elmozdulási vektormezőből differenciálással előállítható:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \tag{3.3}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \tag{3.4}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}. \tag{3.5}$$

Lineárisan rugalmas anyagmodellt feltételezve az alakváltozási és feszültségi tenzormező közötti kapcsolatot az általános Hooke-törvény adja:

$$\sigma_x = 2G \left[\varepsilon_x + \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{1 - 2\nu} \nu \right], \tag{3.6}$$

$$\sigma_y = 2G \left[\varepsilon_y + \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{1 - 2\nu} \nu \right], \tag{3.7}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{1}{G} \tau_{xy}, \tag{3.8}$$

$$\sigma_z = \nu \left(\sigma_x + \sigma_y \right). \tag{3.9}$$

Más anyagegyenletek is alkalmazhatók, amennyiben a bennük szereplő állandók méréssel meghatározhatók és az alkalmazni kívánt végeselem szoftver képes az adott összefüggés felhasználására. *Az anyagegyenlet megváltoztatása a boltozódási algoritmust nem változtatja meg.*

A fenti egyenletrendszert a következő peremfeltételek figyelembevételével kellett megoldanom.

I. A tartomány két oldalán az elmozdulási vektormező vízszintes komponense zérus $(u_x = 0)$.

II. A tartomány alsó oldalán (a modellsiló alján) az elmozdulásmező függőleges komponense zérus (amíg a kifolyónyílás zárva van) $(u_y = 0)$.

III. A felső oldalra ható terhelés értéke zérus $(p_y = 0)$.

A boltozatkialakulás vizsgálatánál kiinduló feltevésem az, hogy a *szemcsés anyagok húzófeszültség elviselésére csak igen kis mértékben képesek.* Ezt felhasználva, végeselem-módszer segítségével tudtam modellezni a boltozat kialakulás folyamatát.

A boltozatkialakulás nyomon követéséhez elsőként meghatároztam az anyaghalmazban kialakuló $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ feszültségi tenzormezőt zárt kiömlőnyílás esetére. Ez matematikailag az előbbiekben felírt (3.2-3.5-3.9) differenciálegyenlet rendszer megoldását jelenti az I.-III. peremfeltételek mellett.

A zárt kiömlőnyíláshoz tartozó feszültségi tenzormező meghatározása után a kiömlőnyílást valamilyen kezdeti méretre nyitottam, azaz a tároló középvonalától szimmetrikusan, mindkét irányban felmért $d/2$ távolságig megszüntettem az $u_y = 0$ peremfeltételt. Ezután újra megoldottam a differenciálegyenlet rendszert, az előbb módosított peremfeltételek mellett. Ennek eredményeként megkaptam a nyitott kiömlőnyílás esetén kialakuló feszültségviszonyokat.

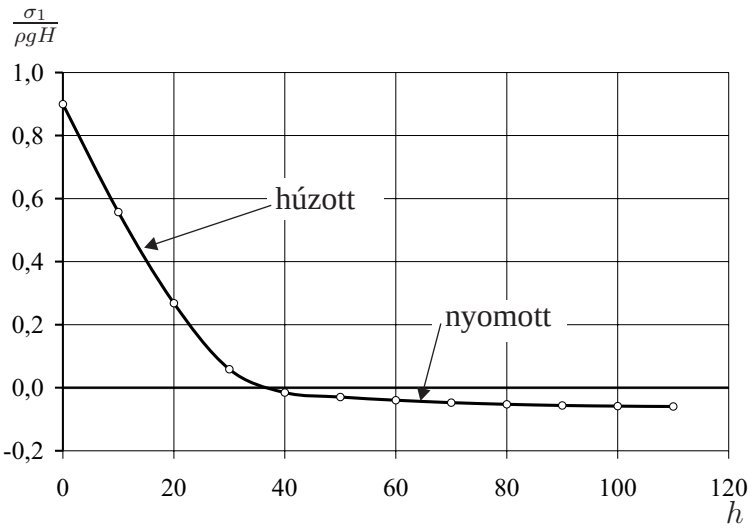
A számított feszültségi tenzormezőt felhasználva eltávolítottam az anyaghalmazból azt a részt, amelyben húzófeszültségek alakultak ki, hiszen ezek

a valóságban kiesnek a tárolóedényből az alsó nyíláson keresztül. A húzott tartományok meghatározásához meg kellett vizsgálnom, hogy az anyag mely tartományában alakultak ki húzófeszültségek. A húzott részek kijelöléséhez megoldottam a főfeszültségek meghatározására szolgáló

$$(\boldsymbol{F} - \sigma_n \boldsymbol{E})\,\mathbf{n} = \mathbf{0} \tag{3.10}$$

egyenletrendszert a halmaz minden elemi tartományának középpontjában.

Ahol az egyenletrendszerből meghatározott σ_n értékek bármelyike pozitív, abban az elemi tartományban a halmaz igénybevétele húzás.



3.2. ábra. Fajlagos első főfeszültség $\left(\frac{\sigma_1}{\rho g H}\right)$ a modellsiló nyitott kiömlőnyílása felett, a szimmetriatengely mentén felfelé.

17. definíció. *Fajlagos feszültségnek* nevezem a $\frac{\sigma}{\rho g H}$ mennyiséget.

A 3.2. ábrán látható a fajlagos első főfeszültségek eloszlása a kiömlőnyílás feletti magasság függvényében, a modell szimmetriatengelye mentén felfelé.

Látható az ábrából, hogy a fajlagos első főfeszültség értéke egy bizonyos magasságban pozitívból negatívba (azaz húzásból nyomásba) megy át.

A valóságban a szemcsés halmazok képesek minimális értékű húzófeszültséget elviselni, tehát az anyagkihullás feltétele: $0 < \sigma_{\min} < \sigma_1$. A minimális elviselhető húzófeszültség értéke elhanyagolhatóan kicsi, de többek között ez okozza a boltozat látszólagos ívének kísérletenként más és más alakját.

A húzó igénybevétellel terhelt elemi tartományokat töröltem a végeselem modellből. Ezután újra meghatároztam – a módosult geometria miatt megváltozott – feszültségviszonyokat, majd újra eltávolítottam a húzott tartományokat.

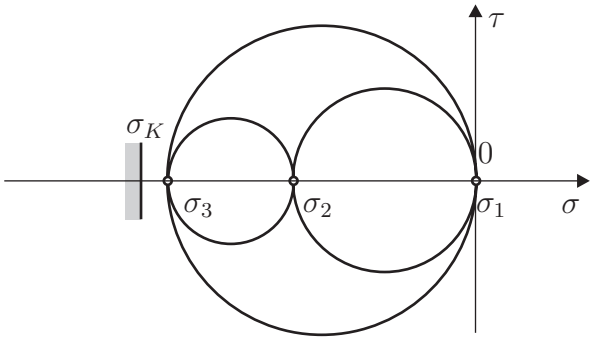
Végeselem szimulációim azt mutatták, hogy ez az ismétlődés egy bizonyos (általában 10 és 20 közötti) lépésszám után minden esetben megáll, ugyanis az így növekvő természetes boltozat bizonyos alakja mellett a húzott részek elfogynak. Ilyenkor mondhatjuk, hogy elértük az adott d szélességű kiömlőnyíláshoz tartozó természetes boltozatot. *Ez azonban még nem jelenti azt, hogy az így kialakult természetes boltozat stabilis.*

3.1.2. A természetes boltozat összeomlása

8. állítás. Kéttengelyű feszültségállapotban (azaz a boltozat peremén) a szemcsés anyaghalmazok nem képesek egy – az előterhelés értékétől (azaz a halmaz magasságától) is függő – kritikus értéknél nagyobb nyomófeszültség elviselésére. Mindaddig, amíg a boltozat peremének környezetében a sajátértékek (3.10) egyenletből számolt legkisebbike nem lesz kisebb, mint a kéttengelyű feszültségállapothoz tartozó kritikus nyomófeszültség, addig a boltozat nem omlik össze.

A kiömlőnyílás mérete tehát mindaddig növelhető, míg a kialakuló stabil természetes boltozatok peremén a *nyomó*feszültségek nem lépnek túl egy kritikus értéket (3.3. ábra). *A kéttengelyű feszültségállapothoz tartozó*

kritikus feszültség (σ_K) *a triaxiális berendezés segítségével meghatározható.*



3.3. ábra. A kéttengelyű feszültségállapothoz tartozó kritikus nyomófeszültség és a főfeszültségek viszonya.

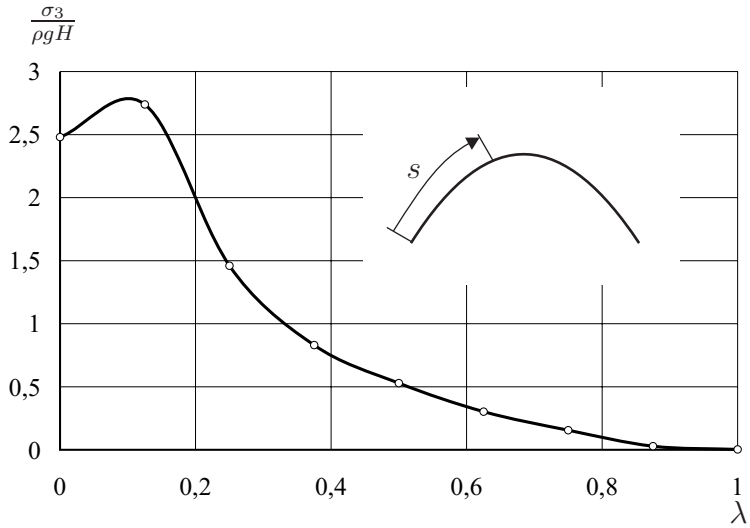
9. állítás. Végeselem módszerrel végzett számításaim szerint a keletkező legnagyobb nyomófeszültségek abszolút értékének maximuma a boltozat talppontjának környezetében van.

Ezzel egybevágnak azok a mérési tapasztalataim, melyek szerint a boltozat-összeomlást okozó „repedések” az esetek nagy többségében a boltozat talppontjának környezetéből indultak.

A 3.4. ábrán a nyomófeszültségek eloszlását látjuk a boltív pereme mentén, $\lambda = \frac{s}{s_0}$, ahol s_0 a boltív talppontjától tetőpontjáig mért ívhossz.

Az előbbieket összefoglalva megfogalmazható a boltozat-összeomlás szükséges feltétele.

4. tétel. A boltozat-összeomlás szükséges feltétele: *a boltozat környezetében a kéttengelyű feszültségállapotban lévő anyagtartomány valamely kontinuumelemében a nyomófeszültségnek túl kell lépnie a kéttengelyű feszültségállapothoz tartozó – az anyagtulajdonságoktól és az előtömörítés mértékétől függő – kritikus értéket.*



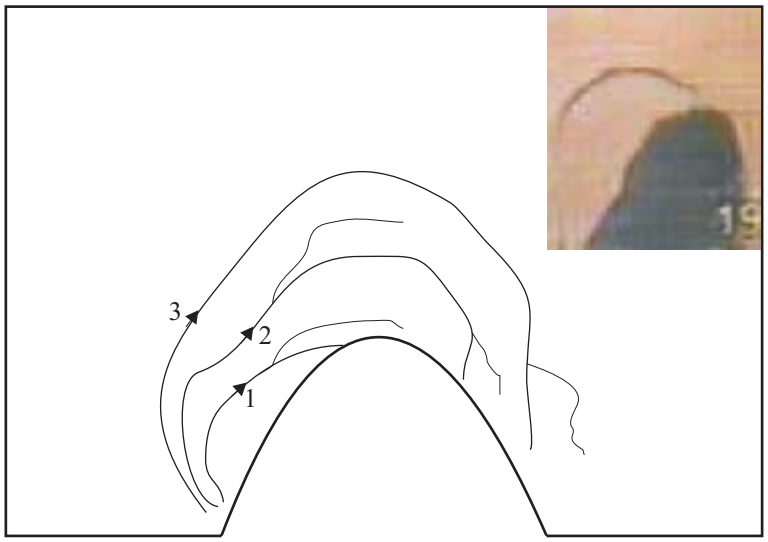
3.4. ábra. A hidrosztatikus feszültséggel osztott harmadik főfeszültségek eloszlása a boltív mentén, talpponttól a tetőpontig.

A boltozat-tönkremenetel videofelvételeinek elemzése azt mutatta, hogy az összeomlás oka nem lehet kizárólag a kéttengelyű feszültségállapotban lévő anyagtartományok összeroppanása. Egy-egy ilyen anyagtartomány összeroppanása esetenként csak a boltozat méretének kismértékű növekedését okozta. A boltozat ilyen esetekben tovább nőtt – bár most nem a húzott részek kihullásával –, de nem omlott össze.

A halmaz *teljes összeomlásához* szükséges az is, hogy az összeroppanás környezetéből „repedések” induljanak ki, melyek a halmaz belsejébe hatolva végül annak összeomlását okozzák.

A boltozat-összeomlás egy pontosabb modelljében szükséges tehát a „repedések” továbbterjedésének feltételeit is figyelembe venni.

Tételezzük fel, hogy a kéttengelyű feszültségállapothoz tartozó kritikus feszültség túllépésének következtében egy, a boltív környezetében található elemi tartomány összeroppant és abban kezdeti „repedések” jelentek



3.5. ábra. A boltozat tönkremenetelét előidéző „repedések” a talppont környezetéből indulnak.

meg. Mivel a kezdeti „repedés” csúcsának környezetében a feszültségi tenzormező jellege lineárisan rugalmas esetben a terhelési viszonyoktól független, minden repedéscsúcs környezetében ugyanolyan, egymástól csak egy (szorzó)tényezőben különböző feszültségi tenzormezők alakulnak ki.

A kezdeti törésvonal továbbterjedésének szükséges feltételét keresve vizsgáljuk meg a „repedés” környezetében kialakult fajlagos alakváltozási energiamezőt.

18. definíció. *Fajlagos alakváltozási energiasűrűségnek* nevezzük az

$$u(x,y,z) = \frac{1}{2}\boldsymbol{F}\cdot\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sigma_i\varepsilon_i \tag{3.11}$$

összefüggés segítségével meghatározható mennyiséget, ahol σ_i-k a főfe-

szültségek (amelyeket (3.10)-ben már meghatároztunk) ε_i-k pedig a fő-nyúlások, ezeket a (3.9) Hooke-törvény segítségével származtathatjuk.

A fajlagos alakváltozási energia értéke felbontható két részre. Az egyik a tiszta térfogatváltozásból, a másik pedig a térfogatváltozás nélküli torzulásból származik. A repedésterjedés megindulásában elsősorban a torzítási energia intenzitás játszik szerepet.

19. definíció. *Torzítási energia intenzitásnak* nevezzük a

$$u_d(x, y, z) = \frac{1}{6G}\left(F_I^2 - 3F_{II}\right) \tag{3.12}$$

összefüggés segítségével meghatározható értéket, ahol F_I és F_{II} a feszültségi tenzor első és második skalárinvariánsa.

Kísérleti tapasztalataim, valamint végeselem módszerrel végzett számításaim alapján megfogalmazható a boltozat-összeomlás elégséges feltétele.

5. tétel. A természetes boltozat-összeomlásának elégséges feltétele: *a bolotzat teljes összeomlásához a boltív mentén, kéttengelyű feszültségállapotban lévő anyagtartomány valamely kontinuumelemében a fajlagos torzítási energiasűrűség-intenzitásnak túl kell lépnie egy, az anyagra jellemző kritikus értéket.*

20. definíció. *Kritikus torzítási energiasűrűségnek* nevezem a boltozat összeomlásához szükséges fajlagos torzítási energiasűrűség értékét.

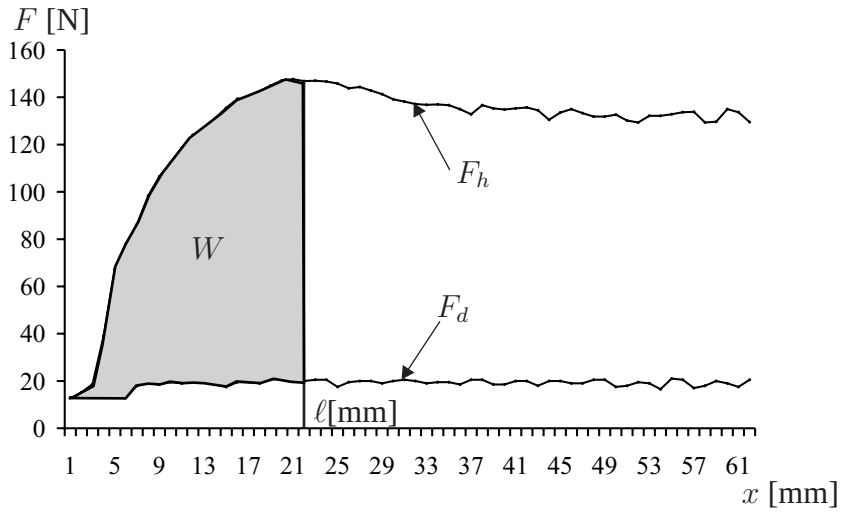
A kritikus torzítási energiasűrűség értéke nyíródobozos vizsgálat segítségével határozható meg.

A kritikus torzítási energiasűrűség értéke az előtömörítő feszültségek értékétől függ.

A nyíródoboz alkalmas a kritikus deformációs energiasűrűség mérésére. Ehhez ugyanis az anyagminta elnyírása során a szemcsehalmazba

juttatott energia mennyiségét kell meghatároznunk. Ez az energia pedig egyértelműen a külső erők munkájából származik, amely az erők és az elmozdulások ismeretében meghatározható.

Vizsgáljuk meg a nyíródobozra ható külső erők munkáját. A keret vízszintes elmozdításához szükséges munka meghatározható, hiszen ismerjük a vízszintes erő és a hozzá tartozó elmozdulások értékét minden időpillanatban. Amennyiben feltételezzük, hogy a külső erők munkája teljes egészében belső energiaként halmozódik fel a halmazban, akkor a deformációs energiasűrűségi mező a halmaz belsejében számítható. A nyíródoboz álló és mozgó részei közötti súrlódás legyőzésére fordított munkát pedig meghatározhatjuk egy üres nyíródobozzal végzett mérés végrehajtásával. A 3.6. ábrán látható szürkével jelölt terület – a nyírást okozó erők munkája



3.6. ábra. A nyírókészülékben elhelyezett anyagmintára ható erők munkája. F_h az anyagminta elnyírására alkalmazott erő, F_d az üres nyírókészülék mozgatásához szükséges erő. Az ábrán látható függőleges vonal helyét F_h maximális értékével jelöltem ki.

– meghatározható a mérési adatok ismeretében:

$$W_{\mathrm{t}} = \int_0^{\ell} \left(F_h(x) - F_d(x)\right) \mathrm{d}x, \tag{3.13}$$

ahol x a vízszintes irányú elmozdulást, F_h a vízszintes irányú erőt, F_d az üres készülék mozgatásához szükséges erőt jelenti.

Figyelembe kell vennünk ezen munka mellett a függőleges terhelésekből származó energianövekményt. Kvázistatikus terhelést feltételezve

$$W_{\mathrm{f}} = \int_0^{h} F \mathrm{d}y = \frac{1}{2} F h, \tag{3.14}$$

ahol h az anyagminta függőleges (y) irányú összenyomódása.

A halmaz magasságának csökkenése miatti potenciális energiaváltozás elhanyagolható.

Összesen tehát a nyíródobozban található szemcsehalmazban

$$U = W_{\mathrm{t}} + W_{\mathrm{f}} \tag{3.15}$$

belső energia halmozódik fel a terhelés hatására.

Feltételezve, hogy a kontinuumelemek egymás- és külső környezet közötti hőcseréje elhanyagolható, a külső erők munkája teljes egészében belső energiaként jelenik meg a nyíródobozban elhelyezett anyagmintában.

Bár végeselem módszerrel végzett vizsgálataim egyértelműen a fajlagos alakváltozási energiamező nyíródobozbeli eloszlását nem állandónak mutatják, mégis első közelítésben feltételezhetjük az energiasűrűség egyenletes eloszlását. Így a nyíródobozba helyezett anyagmintában felhalmozott – és a külső erők munkájának ismeretében mérhető – összes belső energiát elosztva a nyírási zóna térfogatával, a tönkremenetel megindulásához tartozó energiasűrűség értéke becsülhető. A nyírási zóna vastagságát az irodalmi források [11] az átlagos szemcseméret tízszeresének becsülik.

Az alakváltozási energiasűrűség boltozat menti eloszlását vizsgálva azt tapasztaljuk, hogy az energiasűrűségnek a boltozat talppontjának környezetében maximuma van. Ebből is arra következtethetünk, hogy a boltozat-összeomlást okozó törésvonalak kiindulópontja a boltozatok talppontjának környezete.

Megfogalmazhatjuk tehát a boltozat-összeomlás szükséges és elégséges feltételét.

6. tétel. A természetes boltozatok összeomlásának szükséges és elégséges feltétele.

I. A boltozat környezetében a kéttengelyű feszültségállapotban lévő anyagtartomány valamely kontinuumelemében a nyomófeszültségnek túl kell lépnie a kéttengelyű feszültségállapothoz tartozó – az anyagtulajdonságoktól és az előtömörítés mértékétől függő – kritikus értéket.

II. Ugyanebben a kontinuumelemben a fajlagos torzítási energiasűrűségnek túl kell lépnie egy, az anyagra jellemző kritikus értéket.

Amennyiben mindkét feltétel teljesül, a természetes boltozat összeomlik, és a szemcsés anyag a tárolóból kifolyik.

A természetes boltozódás vizsgálatához tehát a klasszikus lineárisan rugalmas kontinuum modellt bővíteni kell. Feltételezem, hogy a homogén, izotróp kontinuumként modellezett szemcsés halmaz belsejében hely és orientáció szerint egyenletes eloszlásban repedések találhatók, és ezek a repedések akkor indulnak növekedésnek, amikor az őket tartalmazó kontinuumelemben a fajlagos torzítási energiasűrűség értéke túllép egy, az anyaghalmazra jellemző korlátot.

3.1.3. Boltozódási algoritmus

21. definíció. *Boltozódási algoritmusnak* nevezem az alábbi eljárást.

I. Jelöljük ki a vizsgálni kívánt T tartományt, adjuk meg a modellezni kívánt szemcsés anyag anyag- és tönkremeneteli jellemzőit:

- a ρ sűrűséget,
- az E rugalmassági modulust,
- a ν Poisson tényezőt valamint a
- a kéttengelyű feszültségállapothoz tartozó $\sigma_K(\sigma_t)$ tönkremeneteli határfeszültség-függvényt.

II. Adjuk meg a peremfeltételeket. Zárt és nyitott kifolyónyílás, szükség esetén az oldalfal rugómerevsége c_0, a ϕ_w falsúrlódás is figyelembe vehető itt.

III. Oldjuk meg a rugalmasságtani egyenleteket a peremfeltételek figyelembevételével.

$$\boldsymbol{F}\cdot\nabla+\mathbf{f} = \mathbf{0}, \tag{3.16}$$

$$\frac{1}{2}\left(\mathbf{u}\circ\nabla+\nabla\circ\mathbf{u}\right) = \boldsymbol{A}, \tag{3.17}$$

$$\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{F}, \tag{3.18}$$

$$\mathbf{u}|_{A_u} = \mathbf{u}_0, \tag{3.19}$$

$$\boldsymbol{F}\cdot\mathbf{n}|_{A_p} = \mathbf{p}_0. \tag{3.20}$$

A megoldást célszerű végeselem módszer segítségével, numerikus úton meghatározni.

IV. A feszültségviszonyok ismeretében határozzuk meg a halmaz minden kontinuumelemében a főfeszültségek értékeit az

$$\left(\boldsymbol{F}-\sigma_n\boldsymbol{E}\right)\mathbf{n}=\mathbf{0} \tag{3.21}$$

egyenletek megoldásával.

V. A nyitott kifolyónyílás feletti részből távolítsuk el azokat a kontinuumelemeket, melyekben a sajátértékek legnagyobbika (σ_1) pozitív.

VI. Vizsgáljuk meg a kiömlőnyílás felett kialakult szabad felület környezetében lévő kontinuumelemek mindegyikében σ_K és σ_3 viszonyát[1]. Ha a $\sigma_3 > \sigma_K$ feltétel teljesül minden peremen lévő kontinuumelemben, akkor továbbléphetünk a VIII. pontba. Ha a $\sigma_3 \leq \sigma_K$ feltétel teljesült, akkor a vizsgált kontinuumelem összeroppan.

VII. Ha a fajlagos alakváltozási energiasűrűség ugyanebben a kontinuumelemben elérte az u_K kritikus értéket, akkor a kontinuumelemből repedések indulnak ki, melyek a teljes halmaz összeomlását és az anyag tárolóból való kifolyását idézik elő. Amennyiben a deformációs energiasűrűség nem érte el a kritikus értéket, abban az esetben csak az összeroppant tartományt kell eltávolítanunk a halmazból, majd továbbléphetünk a kövekező pontba.

VIII. A kihullott részek eltávolítása után kialakult új T tartományra fogalmazzuk meg újra a peremfeltételeket. Az új peremfeltételek ismeretében lépjünk vissza a III. pontra.

10. állítás. A folyamat tapasztalataim szerint háromféleképpen végződhet.

– A húzóigénybevételből adódó anyagkihullás addig tart, míg az összes anyagot el nem távolítjuk a tárolóból, azaz amíg a T tartomány el nem tűnik.

– Valamelyik lépésnél a $\sigma_3 \leq \sigma_K$, feltétel teljesül a tartomány alsó peremén lévő valamely kontinuumelemben. Ez a kifolyás megindulását jelenti.

– Bizonyos esetekben az algoritmust addig futtathatjuk, míg a húzott részek elfogynak, és közben a $\sigma_3 > \sigma_K$ feltétel is érvényben marad mindenütt. *Ez stabil természetes boltozatok kialakulását jelenti.*

[1] A reláció értelmezésénél ügyeljünk arra, hogy mind σ_3, mind σ_K negatív!

A boltozódás szimulációk futtatásához elkészítettem egy lapos fenekű tárolóedény végeselem modelljét (3.1. ábra).

Szemcsés anyagként a [9] kísérleteihez felhasznált gipsz port választottam. A gipsz por rugalmassági modulusát és Poisson tényezőjét a valódi triaxiális berendezéssel végzett méréseim során határoztam meg (2.6. és 2.7. ábra). E és ν értékének kiválasztásához meghatároztam a modellsiló alján számítható $\rho g H$ hidrosztatikus feszültséget. Ezt a feszültségértéket a triaxiális mérés (2.5. ábra) függőleges tengelyén felmérve, majd a σ_z grafikonról visszavetítve meghatároztam ε_z értékét. ε_z értékének ismeretében a 2.6. és 2.7. ábrákat felhasználva megadtam E és ν értékét.

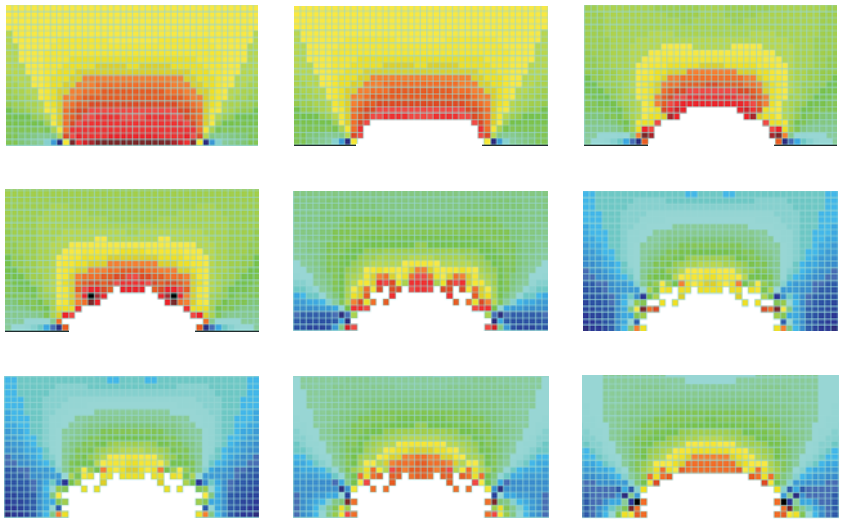
A kiömlőnyílás kinyitása után megvizsgáltam a halmazban kialakuló feszültségviszonyokat, és a húzott tartományokat eltávolítottam a halmazból. Húzott tartománynak tekintettem azokat a részeket, ahol $\sigma_1 > \sigma_{+\mathrm{min}} > 0$.

Végrehajtva az előző fejezetben leírt algoritmus egyes lépéseit, a 3.7. ábrán látható eredményeket kaptam. Mivel a nyomófeszültség értéke ebben az esetben sehol nem haladta meg a tönkremenetelhez tartozó értéket, ezért az utolsó alak az adott kifolyónyíláshoz tartozó stabil boltozat. A feszültségviszonyokra jellemző azonos színek sajnos ábránként más és más feszültség értékekhez tartoznak, mert a végeselem szoftver mindig az adott lépéshez tartozó feszültség minimum és maximum értékek között „osztja fel” a rendelkezésre álló színeket. Az ábrán elsősorban a boltozat alakulásának folyamatát érdemes nyomonkövetni. Ebben az esetben kilenc lépés kellett a stabil boltozat kialakulásához.

3.2. Boltozódás garatban

A természetes boltozódás jelenségének garatban történő vizsgálatához elkészítettem a [9] cikkben szereplő siló végeselem modelljét (3.8. ábra).

A modellsiló egy (a függőleges iránytól mérve) $40°$-tól $10°$-ig változtatható hajlásszögű garatból, és egy felette elhelyezett 1m magasságú tárolórészből áll. A siló rajz síkjára merőleges méretét végtelennek tekintettem,

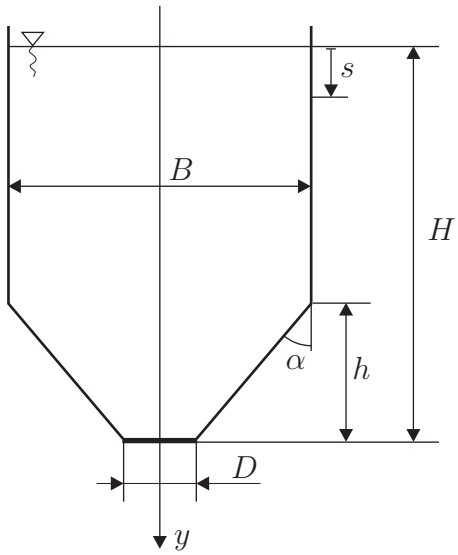


3.7. ábra. Természetes boltozat kialakulása lapos fenekű tartályban. A végeselem módszerrel végrehajtott szimuláció köztes lépéseihez tartozó boltozat alakok és feszültségviszonyok láthatók az ábrán.

azaz sík alakváltozási állapot létrejöttét feltételeztem.

Szemcsés anyagként a [9] kísérleteihez felhasznált gipsz port választottam. A gipsz por rugalmassági modulusát és Poisson tényezőjét a valódi triaxiális berendezéssel végzett méréseim során határoztam meg, ugyanazzal a módszerrel, amit a lapos fenekű tartály esetén bemutattam. E és ν értékének kiválasztásához meghatároztam a modellsiló alján számítható $\rho g H$ hidrosztatikus feszültséget. Ezt a feszültségértéket a triaxiális mérés (2.5. ábra) függőleges tengelyén felmérve, majd a σ_z grafikonról visszavetítve meghatároztam ε_z értékét. ε_z értékének ismeretében a 2.6. és 2.7. ábrákat felhasználva megadtam E és ν értékét.

Az anyagjellemzők a nyomófeszültség (és így a halmaz magasság) függvényében változnak. A függőleges fallal határolt részben E és ν változása az átmeneti tartományra ható terhelést nem változtatja meg, az átmeneti



3.8. ábra. Silómodell garattal.

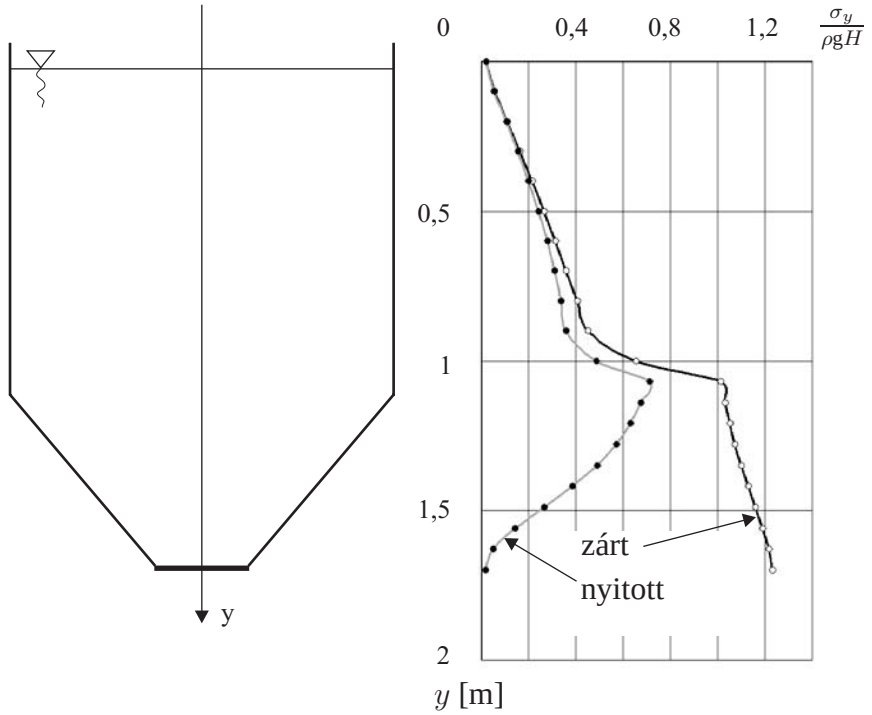
tartomány mérete pedig nem elég nagy ahhoz, hogy ugyanez a változás számottevő hatással bírjon, ezért adtam meg az egész halmazra ugyanazokat az anyagjellemzőket.

A végeselem modellben a szemcsés anyag silófalra merőleges elmozdulását megakadályoztam. Zárt és nyitott kifolyónyílás mellett meghatároztam a halmazbeli feszültségviszonyokat.

Végeselem módszerrel végzett vizsgálataim szerint nyitott kifolyónyílás esetén a siló középvonala mentén számított fajlagos harmadik főfeszültség értékében ugrást találunk.

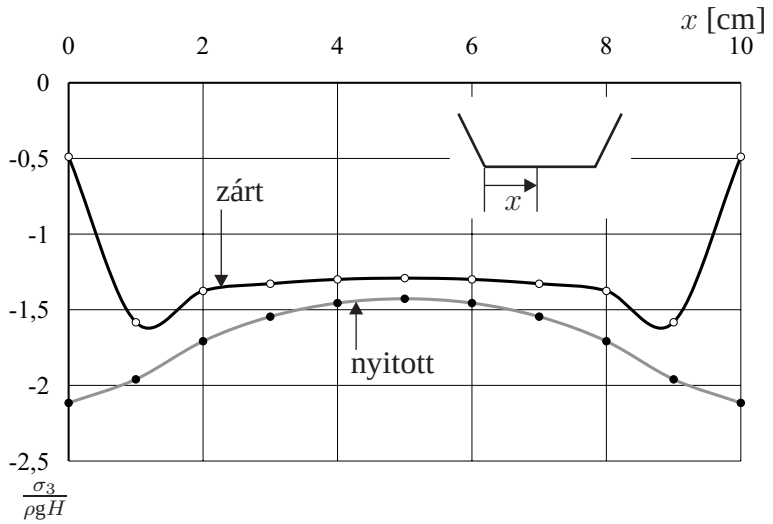
A kifolyónyílás felett, a nyílás mentén keletkező fajlagos főfeszültség értékek vizsgálata azt mutatja, hogy a halmaz tönkremenetele szempontjából figyelmet érdemlő helyek a falak mellett találhatók.

11. állítás. A siló aljának kinyitása után a kifolyónyílás környezetében található szemcsés anyag minden esetben kihullik a silóból.



3.9. ábra. Fajlagos feszültségek a modellsiló szimmetriatengelyében zárt és nyitott kifolyónyílás esetén.

A 3.10 ábrát megvizsgálva látható, hogy a kifolyónyílás zárt helyzetében keletkező fajlagos harmadik főfeszültség értéke kisebb a nyílás kinyitása után keletkező fajlagos harmadik főfeszültségnél. A siló alján a σ_t háromtengelyű feszültségállapothoz tartozó előtömörítő feszültségnél nagyobb kéttengelyű feszültségállapothoz tartozó nyomófeszültség keletkezik. A szemcsés anyaghalmazok kéttengelyű feszültségállapotban csak a kéttengelyű feszültségállapothoz tartozó σ_K kritikus nyomófeszültségnél kisebb nyomófeszültséget képesek elviselni. Méréseim és az összes szakirodalmi forrás szerint is minden esetben igaz a $\sigma_K < \sigma_t$ reláció. A kifolyó-



3.10. ábra. Fajlagos harmadik főfeszültségek a modellsiló kifolyónyílásánál.

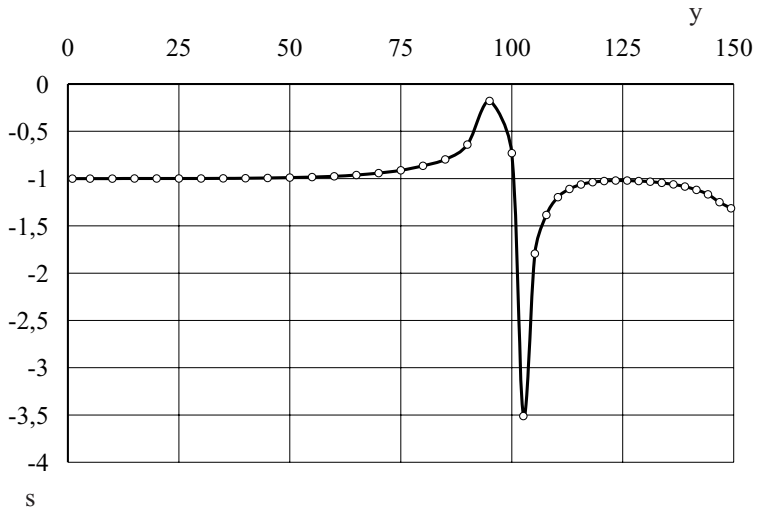
nyílás feletti anyagtartományban található kontinuumelemek ennek következtében összeroppannak, és a nyitott kifolyónyíláson keresztül kiesnek a silóból.

Az összeroppant anyagtartomány eltávolítása után megmaradt anyagrészre elvégzett végeselemes számításaim szerint a garatbeli anyagrészekben a σ_3 nyomófeszültségek értéke nőtt.

Az előtömörítő feszültségek megnövekedésével (mely a halmaz terhelhetőségét is növeli) egyidőben a fal közelében továbbra is igaz maradt a – az összeroppant tartomány kihullása után – kéttengelyű feszültségállapotba került anyagrészekre a $\sigma_K < \sigma_t$ reláció. A garatban boltozódás tehát nem jöhetne létre, hiszen a garatban minden anyagtartomány összeroppanna mindaddig, amíg az anyaghalmaz által átívelt nyílásméret – a kúpos garatban felfelé haladva – olyan naggyá nem válna, hogy az anyaghalmaz

középvonalában már húzófeszültségek jelennének meg[2], amelyek szintén a szemcsés halmaz kihullását okoznák. A silónak tehát *minden esetben ki kéne ürülnie, boltozódás nélkül.* A kísérleti tapasztalatok szerint ez az állítás nyilvánvalóan nem igaz.

A most felmerült látszólagos ellentmondás feloldásának érdekében vizsgáljuk meg részletesebben a silóbeli feszültségviszonyokat.



3.11. ábra. Fajlagos harmadik főfeszültségek a modellsiló fala mentén, nyitott kifolyónyílásnál. (Az ábra a jobb láthatóság érdekében $90°$-kal el van forgatva. A garat és a függőleges falakkal határolt rész csatlakozása az y=100 cm mélységnél található.)

A 3.11. ábra a modellsilóbeli szemcsés halmaz tömörödését – majd kéttengelyű feszültségállapotban tönkremenetelét – okozó fajlagos harmadik főfeszültségek eloszlását mutatja a siló fala mentén lefelé növekvő y

[2]Végeselem módszerrel végzett vizsgálataim szerint bizonyos nyílásméret felett ezek a húzófeszültségek mindig megjelennek.

koordináta függvényében. Az ábrán 100 cm-es mélységben – az átmeneti tartományban – kiugróan magas fajlagos harmadik főfeszültség értéket látunk. 135 cm mélységben, hozzávetőleg a garat magasságának felénél a fajlagos harmadik főfeszültségnek helyi minimuma van.

Más anyagjellemzők felhasználásával lefuttatott végeselem számításaim is hasonló jellegű feszültség eloszlásokat mutattak. Mindezek alapján megfogalmazható a következő állítás.

12. állítás. A siló fala mentén számított $\frac{\sigma_3}{\rho g H}$ fajlagos harmadik főfeszültségfüggvény az átmeneti tartományban maximális értékét, a garat-magasság felének közelében pedig minimumát veszi fel.

22. definíció. *Feszültséghányadosnak* nevezem a garat-magasság felének környezetében számított minimális és az átmeneti tartományban számított maximális harmadik főfeszültség hányadosát.

Miután az összeroppant szemcsés anyaghalmaz silóból történő kihullása megkezdődik, a garat üresen maradt részére újabb anyagrétegek kerülnek; a silóban lévő szemcsés anyag elkezd a falak mentén lefelé csúszva mozogni. (Ezt a jelenséget [44] is említi.)

Miután az anyagkihullás és a halmaz lefelé mozgása együtt zajlik le, ezért feltehető, hogy a garat nem ürül ki teljes mértékben.

Az eddigiek alapján mondhatjuk, hogy az átmeneti tartományban számított maximális fajlagos harmadik főfeszültség tekinthető a halmazra háromtengelyű feszültségállapotban ható előtömörítő feszültségnek. A garat magasságának felénél számított minimális nyomófeszültség pedig tekinthető – az anyagkihullás miatt – a halmazra kéttengelyű feszültségállapotban ható nyomófeszültségnek. Mindezek alapján megfogalmazható a garatbeli boltozódás szükséges feltétele.

7. tétel. *A garatban akkor alakulhat ki természetes boltozat, ha az átmeneti tartományban mérhető σ_3 maximális előtömörítő feszültségből meghatározott σ_K kéttengelyű feszültségállapothoz tartozó kritikus nyomófeszültség*

értéke nagyobb, mint a garatban kialakuló minimális harmadik főfeszültség értéke.

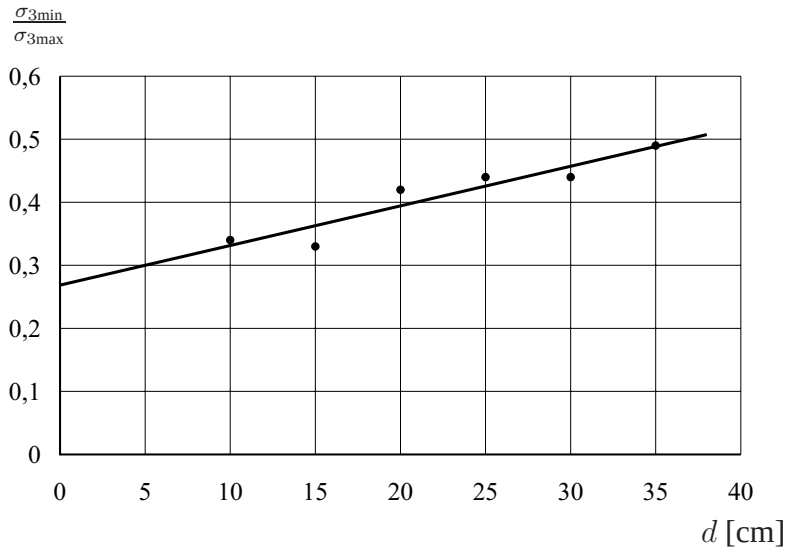
Vizsgálataim során nem vettem figyelembe azt az előtömörítő hatást, amely a szemcsés anyag silóba történő betárolása során éri az anyagot. Amennyiben ez a dinamikus hatásokból eredő előtömörítés elég nagy, megtörténhet, hogy a kifolyónyílás kinyitása után a garat fala mentén keletkező nyomófeszültségek nem elegendőek a kéttengelyű feszültségállapotba került anyag összeroppantásához. A szemcsés anyag ebben az esetben egyáltalán nem hullik ki a tárolóból. Az így kialakult „boltozat” azonban nem stabilis. Ennek az összetömörödött tartománynak a megbontása után a kiáramlás megkezdődik, és az ezt követő esetleges boltozódási jelenségek az előbbiekben leírtak szerint mennek végbe.

13. állítás. Végeselem módszerrel végzett számításaim szerint az átmeneti tartományban számított maximális feszültség és a garatban számított minimális feszültség hányadosaként meghatározott mennyiség a kifolyónyílás méretének csökkenésével csökken (3.12. ábra).

Megvizsgálva a kéttengelyű feszültségállapothoz tartozó tönkremeneteli határgörbe és feszültséghányados kapcsolatát, elvileg háromféle eredményre juthatunk. Amennyiben a feszültséghányados-függvény grafikonja a tönkremeneteli határgörbe felett halad, akkor a garatban természetes boltozatok nem jelennek meg. Fordított esetben, ha a feszültséghányados-függvény grafikonja a tönkremeneteli határgörbe alatt halad, abban az esetben a garatbeli szemcsés anyag boltozódik. Találkozhatunk olyan esettel is, melynél a feszültséghányados-fügvény grafikonja metszi a tönkremeneteli határgörbét. Ilyen esetben a metszéspont ismeretében kijelölhetjük a feltételezett kritikus nyílásméret értékét.

Vizsgáljuk meg a tönkrementeli határgörbe és a feszültséghányados értékek kapcsolatát gipsz esetén (3.13. ábra).

A 3.13. ábrán láthatjuk, hogy a feszültséghányados értékek $\alpha = 20°$-os kifolyónyílás félkúpszög esetén mintegy rásimulnak a tönkrementeli határ-

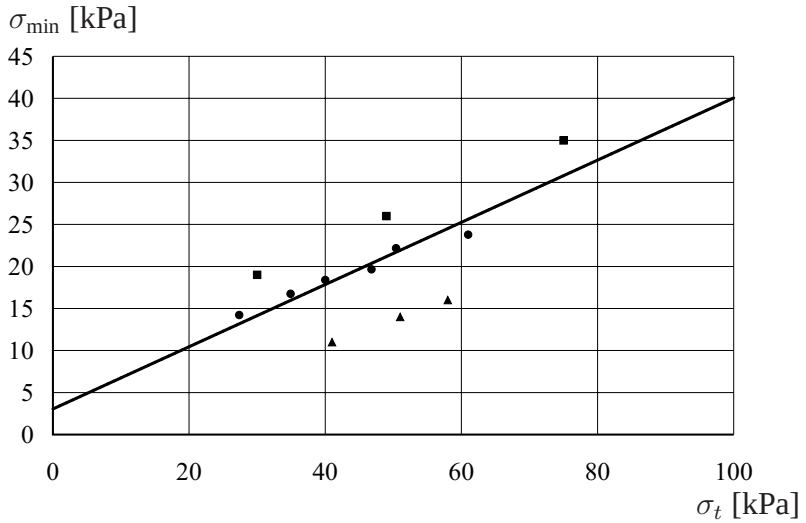


3.12. ábra. Az előtömörítő feszültség és a garatban mért minimális feszültség hányadosa a kifolyónyílás-méret függvényében.

görbére. $20°$-nál kisebb félkúpszög esetén a számítási eredmények a tönkremeneteli határgörbe feletti pontokat adnak, $\alpha > 20°$ esetén pedig a pontok a tönkremeneteli határgörbe alá kerülnek. Ez azt jelenti, hogy a fenti tönkremeneteli határgörbével megadott anyag esetén az $\alpha_K = 20°$-os garat félkúpszög a boltozódás szempontjából kritikus érték. α_K-nál kisebb kúpszögű tárolóedényből az anyag kiáramlik, nagyobb félkúpszög esetén pedig várható a természetes boltozódás jelensége.

Az α_K-val megegyező és annál nagyobb félkúpszögű tartályokban kialakuló boltozódási jelenségek vizsgálatára alkalmazzuk a lapos fenekű tartályoknál alkalmazott, a boltozat kialakulással kapcsolatos energetikai megfontolásokat.

14. állítás. Számításaim szerint a fajlagos alakváltozási energiasűrűség értékének maximuma a garatban is a boltozat talppontjának környezetében



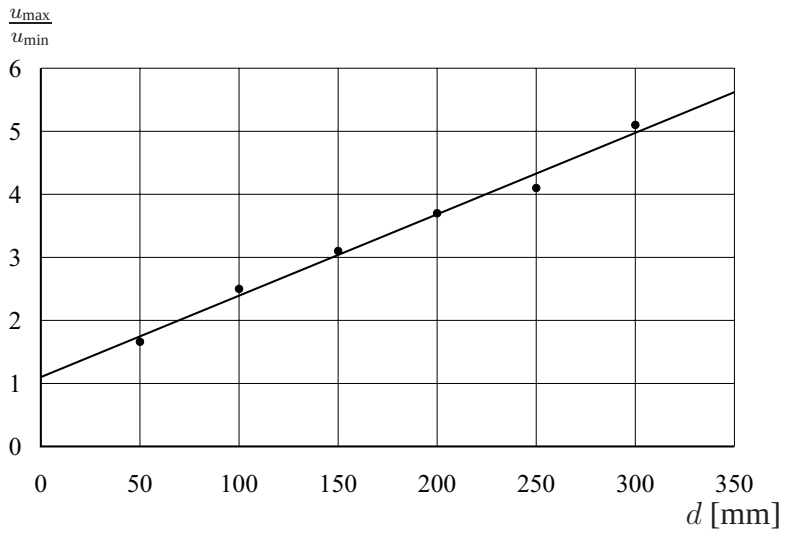
3.13. ábra. A feszültséghányados értékek és a tönkrementeli határgörbe viszonya gipsz esetén. Az ábrán látható egyenes a triaxiális vizsgálattal meghatározott tönkremeneteli határgörbe és *nem* a feszültséghányados értékeket ábrázoló pontokra illesztett egyenes. Az ábrán négyzettel a $10°$-os körrel a $20°$-os, háromszöggel pedig a $40°$-os kúpszögű kifolyónyíláshoz tartozó feszültséghányados értékeket jelöltem.

található.

15. állítás. A maximális fajlagos alakváltozási energiasűrűség értéke a kifolyónyílás méretének növelése esetén nő (3.14. ábra).

A tönkremeneteli határgörbe és a feszültséghányados kapcsolata alapján azt mondhatjuk, hogy α_K-nál nagyobb vagy egyenlő félkúpszögű garatban a szemcsés halmaz a garat-magasság felének környezetében egy, a természetes boltozódás szempontjából kritikus állapotban van.

A feszültséghányados a tönkremeneteli határgörbe által meghatározott kritikus értékhez közeli értéket vesz fel. Így *a garatban természetes boltozatok – a kritikusnál nagyobb félkúpszög esetén – a kifolyás során mindig*



3.14. ábra. A garat falánál számított maximális $(u_{\max})$ és minimális fajlagos alakváltozási energiasűrűség $(u_{\min})$ értékének hányadosa a kifolyónyílás méretének függvényében. (Gipsz por esetén)

kialakulnak. A boltozatok stabilitása viszont a fajlagos alakváltozási energiasűrűségnek a boltozat talppontjánál jelentkező maximumának értékétől függ.

Amennyiben a fajlagos alakváltozási energiasűrűség értéke túllép egy kritikus értéket, a kialakult boltozatok összeomlanak. Az szemcsés anyag tehát kiömlik a tárolóedényből, de a kifolyás természetes boltozatok kialakulásának és összeomlásának folyamataként zajlik le[3].

Az eddig elmondottak alapján megfogalmazható a garatbeli boltozódás szükséges és elégséges feltétele.

8. tétel. A garatbeli boltozódás szükséges és elégséges feltétele. *A garat-*

[3]Oldal István szemcsés halmazok tárolóedényből történő kifolyásával kapcsolatos kísérleti vizsgálatai során ugyanerre a következtetésre jutott.

ban természetes boltozatok alakulnak ki, ha

I. *a feszültséghányados értéke kisebb, mint a kéttengelyű feszültségállapothoz tartozó kritikus érték;*

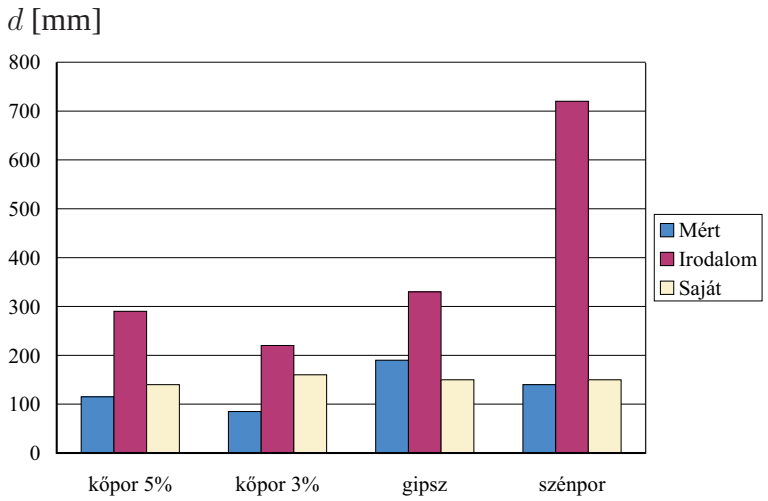
II. *a kialakult boltozat talppontjában mérhető fajlagos alakváltozási energiasűrűség értéke kisebb, mint a halmazra jellemző kritikus érték.*

Ha megvizsgáljuk a gipsz por esetére meghatározott 3.14. ábrán bemutatott fajlagos alakváltozási energiasűrűség értékének növekedését, azt tapasztaljuk, hogy a az $\frac{u_{\max}}{u_{\min}}$ hányados értéke 3-nál kisebb volt azokban az esetekben, amikor a mérések szerint az anyag a tárolóedényben boltozódott.

A [9] kísérleteiben használt kőpor esetén megvizsgálva a fajlagos főfeszültség és a tönkrementeli határgörbe kapcsolatát, a feszültséghányados értékei itt is a tönkremeneteli határgörbe környezetében vannak. A kifolyás során tehát feltehetően ebben az esetben is boltozatok alakultak ki. A kritikus nyílásméret értékének meghatározása érdekében nézzük meg a fajlagos alakváltozási energiasűrűség értékének alakulását. Megvizsgálva, hogy az $\frac{u_{\max}}{u_{\min}}$ hányados mekkora d méret esetén lépi át a 3 értéket. Azt tapasztaljuk, hogy a $d = 140$mm értéknél lesz az $\frac{u_{\max}}{u_{\min}} > 3$ reláció igaz. A mérések szerint a kritikus nyílásméret erre az anyagra 100 és 130 mm között van. Az $\frac{u_{\max}}{u_{\min}}$ kritérium alapján tehát igen jó eredményt kaptunk a kritikus kifolyónyílás méret értékére.

Ugyanilyen módszer alkalmazva szénpor esetén az általam számított kifolyónyílás méret értéke 150 mm, miközben a kifolyónyílás mért értéke 130 és 150 mm közötti érték. Ez szintén jó egyezés.

Kritikus kifolyónyílás mért értékeit, az irodalomban található legjobb becslés értékét, valamint saját eredményeimet közös diagramban ábrázolva láthatjuk az általam kifejlesztett boltozódási algoritmus hatékonyságát (3.15. ábra).



3.15. ábra. Kritikus kifolyónyílás mért és számított értékei.

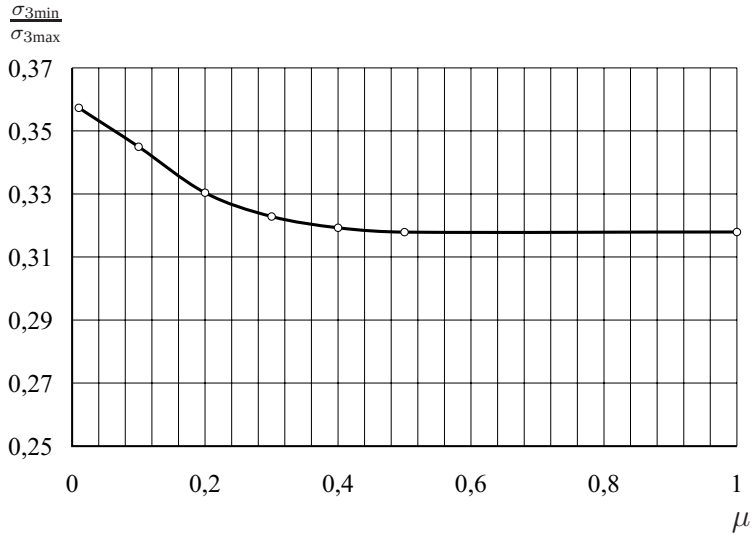
A boltozódási algoritmus segítségével számított kritikus kifolyónyílás méretek a 3.15. ábra szerint az eddig a szakirodalomban szereplő eljárások által számított eredményeknél jóval közelebb vannak a mért értékekhez.

Vizsgálataim során azt tapasztaltam, hogy a szemcsehalmaz és silófal közötti μ súrlódási együttható, a szemcsehalmaz ρ sűrűsége, a szemcsehalmaz E látszólagos rugalmassági modulusa, a szemcsehalmaz ν Poisson tényezője valamint a töltet H magassága van hatással a halmaz boltozódási hajlamára.

Megvizsgáltam a töltet és a silófal közötti súrlódási tényező hatását a feszültséghányados értékére. A (3.16. ábra) szerint a falsúrlódás értékének növekedése csökkenti a feszültséghányados értékét, de nem jelentős mértékben.

A feszültséghányados értékének csökkenése a következőképpen magyarázható: a súrlódási tényező növekedésével a silófal a terhelés egy részét „átveszi” a szemcsés anyaghalmaztól, de az a hatás nagyobb mérték-

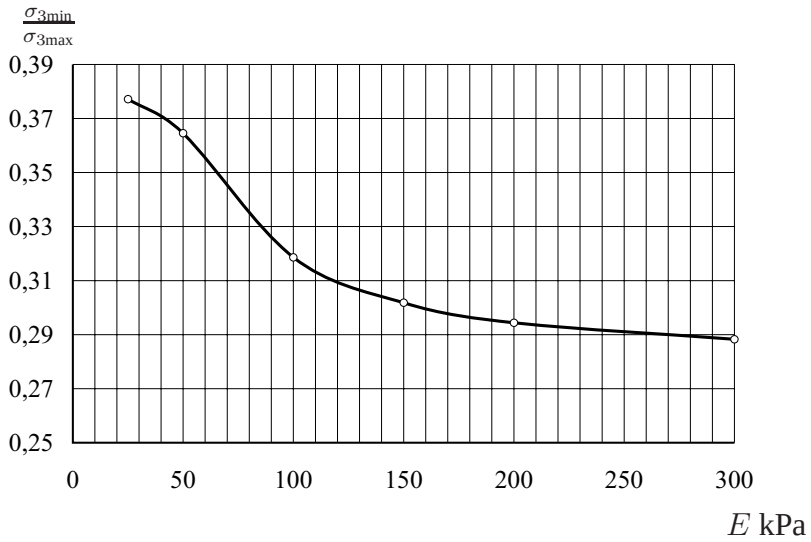
ben jelentkezik a garatban, mint a függőleges falak mentén. Ennek következtében a $\frac{\sigma_{3\min}}{\sigma_{3\max}}$ hányados értéke kismértékben csökken. A garatbeli falsúrlódási tényező értékének növekedése tehát a szemcsés anyaghalmaz boltozódási hajlamát növeli. Amennyiben tehát el szeretnénk kerülni a töltet silóbeli boltozódását, törekednünk kell a falsúrlódási tényező értékének csökkentésére, különösen a garatban. A függőleges falakkal határolt részben ható súrlódóerő hatására ugyanis az átmeneti tartományban mérhető nyomófeszültség – a σ_t előtömörítő feszültség – értéke csökken, ami a boltozódás elkerülésének szempontjából hasznos jelenség.



3.16. ábra. A feszültséghányados értékének kapcsolata a töltet és silófal közötti súrlódási tényezővel.

A töltet fajsúlyának növekedése szintén módosítja a feszültséghányados értékét. A fajsúlynövekedés egyértelműen a feszültséghányados értékének növekedését okozza. A fajsúly növekedése (a többi paraméter értékének változatlansága mellett) tehát a halmaz boltozódási hajlamát csökkentő tényező.

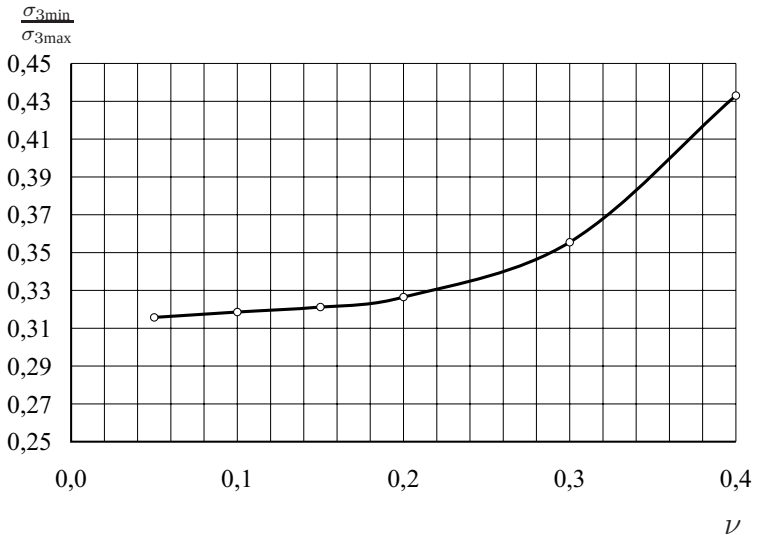
A töltet látszólagos rugalmassági modulusának növekedése a feszültséghányados értékét csökkenti (3.17. ábra). A látszólagos rugalmassági modulus értékének növekedése tehát a szemcsés halmaz boltozódási hajlamát növeli. A szemcsés halmaz látszólagos rugalmassági modulusának értéke a halmaz összetömörítésével növekszik (2.6. ábra).



3.17. ábra. A feszültséghányados értékének kapcsolata a töltet látszólagos rugalmassági modulusával.

A szemcsés halmaz Poisson-tényezőjének növekedése a feszültséghányados értékét növeli (3.18. ábra). A Poisson tényező növekedése tehát a boltozódási hajlamot csökkenti. A szemcsés halmaz Poisson-tényezőjének értéke a halmaz összetömörítésével növekszik (2.7. ábra).

Rögzített anyagtulajdonságok, falsúrlódási tényező, kifolyónyílás kúpszög mellett növeljük a töltet magasságát! Ha a feszültséghányados értékeket ábrázoljuk a töltet tönkremeneteli határgörbéjével együtt, azt tapasztaljuk, hogy a tönkremeneteli határgörbe alól induló feszültséghányados



3.18. ábra. A feszültséghányados értékének kapcsolata a töltet Poisson-tényezőjével.

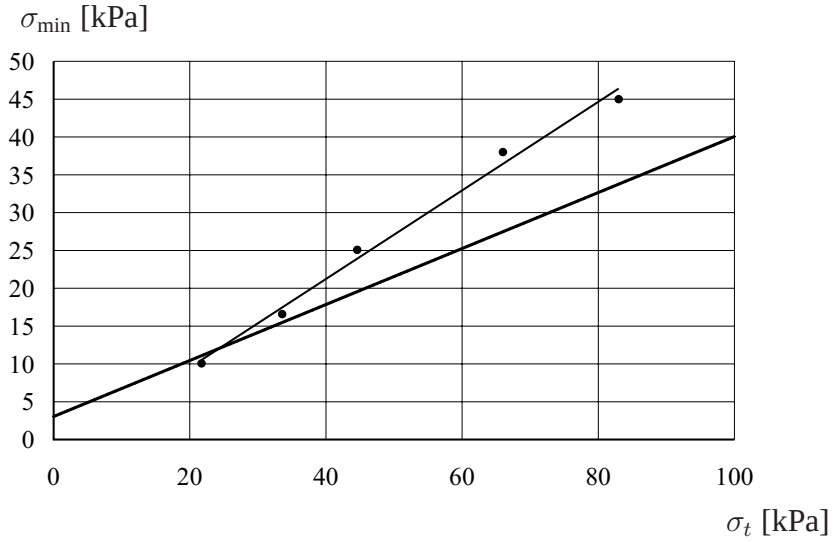
értékek a töltetmagasság növelésével a határgörbe feletti tartományba kerülnek.

A töltetmagasság növelésével tehát a kezdetben kialakult természetes boltozatok összeomlása bekövetkezhet. A töltetmagasság növekedésével az átmeneti tartományban keletkező nyomófeszültség értéke növekszik ugyan, de ennél nagyobb mértékben nő a garatbeli nyomófeszültség értéke, ennek következtében a garatban kéttengelyű feszültségállapotban lévő anyagtartományok a kritikus töltetmagasság túllépése után összeroppannak, az anyaghalmaz kiáramlása megkezdődhet.

A töltetmagasság növekedésnek hatását vizsgálva azonban nem szabad figyelmen kívül hagynunk a látszólagos rugalmassági modulus és a Poisson-tényező változásának hatását sem. Ezek közül az előbbi a boltozódási hajlamot növeli, míg az utóbbi csökkenti.

Az általam alkalmazott lineáris anyagmodell ennek a folyamatnak a

nyomonkövetésére már nem alkalmas.



3.19. ábra. A töltetmagasság növelésének hatása a szemcsés halmaz boltozódási tulajdonságaira.

Az algoritmus pontossága tovább növelhető a szemcsehalmazbeli feszültségviszonyok pontosabb leírásával. Ez a kérdéskör azonban túlmutat jelen dolgozat céljain. A nemlineáris anyagtulajdonság figyelembevétele tovább növelheti az eljárás pontosságát, de a gondolatmenet és a boltozódási folyamat leírására szolgáló módszer változatlan marad.

4. ÖSSZEFOGLALÁS

Természetes boltozódásnak nevezi a szakirodalom azt a jelenséget, amely során a szemcsés halmazban a terhelések hatására kialakul egy anyagréteg, amely képes a felette lévő anyagtömeg súlyából eredő terhelések elviselésére.

A természetes boltozat megjelenése egyrészt akadályozza a szemcsés anyaghalmazok áramlását (pl. a tároló kiürítését), másrészt a tároló falának többletterhelését, esetleg a tároló károsodását, tönkremenetelét okozhatja.

4.1. A kutatási tevékenység összefoglalása

Dolgozatomban megmutattam, hogy a természetes boltozódás jelenségét helyesebb a teljes szemcsehalmazra vonatkozó egyensúlyi állapotként kezelnünk, ezért megadtam a természetes boltozódás egy új definícióját.

Természetes boltozódásnak nevezem a szemcsés halmaznak azt az egyensúlyi állapotát, amikor a szemcsés anyag nem áramlik ki a tárolására szolgáló berendezésből a nyitott kifolyónyíláson keresztül. A természetes boltozat kialakulása a halmazt alkotó kontinuumelemek és a tároló falainak egymásra hatása során kialakult, az egész halmazra jellemző egyensúlyi állapot létrejötte.

A szemcsés anyaghalmazok természetes boltozódásának új modelljét hoztam létre, amelynek felhasználásával a jelenséggel kapcsolatos előrejelzéseim, becsléseim a mérésekkel meghatározható értékekhez közelebb

álló eredményekre vezettek, mint az irodalmi források.

I. Dolgozatomban bemutattam a szemcsés halmazok kontinuum modelljében felhasznált anyag- és tönkremeneteli jellemzőket.

II. Összefoglaltam a szemcsés halmazokban kialakuló feszültségviszonyok, valamint a természetes boltozódás jelenségének modellezésével kapcsolatos eddigi eredményeket.

III. Bemutattam a szemcsés halmazok anyagtulajdonságainak valamint a boltozódás jelenségének vizsgálatára szolgáló kísérleti módszereket.

IV. Bemutattam az általam létrehozott új boltozódásvizsgáló berendezést valamint a triaxiális berendezésen általam végzett módosításokat.

V. A boltozódással kapcsolatos kísérleti vizsgálataim alapján bevezettem egy új boltozat kialakulási és tönkremeneteli modellt.

VI. Bemutattam a boltozat kialakulás és tönkremenetel numerikus szimulációjában – az új modell felhasználásával – elért eredményeimet.

4.2. Új tudományos eredmények

Mérések és numerikus szimulációk segítségével vizsgáltam szemcsés halmazok természetes boltozódását. Megadtam a természetes boltozatok kialakulásának szükséges és elégséges mechanikai feltételét. Mérések és numerikus szimulációk segítségével meghatároztam a szemcsehalmazban kialakult természetes boltozatok összeomlásának mechanikai feltételeit. Valódi triaxiális berendezésen végrehajtható mérési eljárást adtam meg szemcsés halmazok boltozódási tulajdonságainak kísérleti vizsgálatára. Triaxiális kísérleti berendezés felépítésének módosításával lehetővé tettem a szemcsehalmazból kiemelt minta környezetének mechanikai hatásának figyelembevételét az anyag- és tönkremeneteli jellemzők mérése során.

I. Mérésekkel és numerikus szimulációkkal igazoltam, hogy a homogén, lineáris, izotróp anyagmodell alkalmas a szemcsés anyaghalmazok természetes boltozódásának modellezésére.

II. Lapos fenekű tartály esetén mérésekkel és a mechanikai jelenséget leíró differenciálegyenletek numerikus megoldásával igazoltam, hogy a természetes boltozatok szemcsés halmazokban történő kialakulásának szükséges feltétele az, hogy a terhelések hatására kialakuló feszültségi tenzormezőnek a halmaz nyitott kiömlőnyílás feletti részében pozitív sajátértékei legyenek.

III. Numerikus szimulációk segítségével meghatároztam a szemcsés halmazok lapos fenekű tartályokban történő boltozódásának folyamatát.

IV. Kúpos kiömlőnyílású tartály (garat) esetén mérésekkel és a mechanikai jelenséget leíró differenciálegyenletek numerikus megoldásával igazoltam, hogy a természetes boltozatok szemcsés halmazokban történő kialakulásának szükséges feltétele az, hogy az átmeneti tartományban mérhető σ_3 maximális előtömörítő feszültségből meghatározott σ_K kéttengelyű feszültségállapothoz tartozó kritikus nyomófeszültség értéke nagyobb legyen, mint a garat falánál számított minimális harmadik főfeszültség értéke.

V. Numerikus szimulációk segítségével meghatároztam a szemcsés halmazok garatbeli boltozódásának folyamatát.

VI. Mérésekkel igazoltam, hogy a szemcsehalmazban kialakuló természetes boltozatok alakja parabolával kellő pontossággal közelíthető.

VII. Numerikus szimulációkkal igazoltam, hogy a szemcsés halmazokban kialakult természetes boltozatok stabilitásának mértéke jellemezhető a természetes boltozat talppontjának környezetében felhalmozódó fajlagos alakváltozási energia értékével.

VIII. Mérésekkel és numerikus szimulációkkal igazoltam, hogy a természetes boltozatok összeomlásának szükséges feltétele (mind lapos, mind kúpos kiömlőnyílás esetén) az, hogy a természetes boltozatok talppontjának környezetében kialakuló feszültségi mező legkisebb sajátértéke túllépjen egy mérésekkel meghatározható korlátot.

IX. Mérési eljárást adtam meg a szemcsés halmazok kéttengelyű feszültségállapothoz tartozó kritikus feszültségének meghatározására valódi triaxiális berendezés segítsével.

5. SUMMARY

Arching means the formation of a material layer in the granular assembly – caused by the load acting on it – which is capable to bear the load arising from the material above.

The appearance of arches on the one hand holds up the flow of granular material (e.g. the discharge of containers), and on the other hand results overload on the container walls, sometimes causing the collapse of the container.

5.1. Summary of the research activity

In my dissertation I pointed out, that it is more appropriate to treat the arching phenomenon as an equilibrium state of the whole assembly, and because of this I gave a new definition of arching.

In my definition *arching* means an equilibrium state of the whole assembly, when the granular material does not flow out from the container through the open outlet. The formation of an arch is an equilibrium state evolving as a result of the interaction between the container wall and the continuum elements of the granular assembly.

I created a new model of the arching phenomena. With the use of this new model, my estimations were in better correlation with the measurements, than the results found in the literature. In my dissertation I:

I. presented the material and failure criteria used in the continuum model of granular assemblies,

II. summarized the results found in the literature dealing with the stresses arising in granular assemblies and the modelling of the arching phenomena,

III. presented the measurement methods and apparatuses used for the determination of the material- and failure properties,

IV. presented my new arching examining apparatus and my modifications on the triaxial apparatus,

V. introduced a new model of the arch formation and collapse, using the results of my arching measurements,

VI. introduced my results in the numerical simulation of the arching phenomena, using my new model.

5.2. New scientific results

Using measurements and numerical simulations I analyzed the arching action in granular assemblies, gave the necessary and sufficient conditions for the formation of arches. With the use of measurements and numerical simulations I determined the mechanical condition of the arch collapse, using triaxial apparatus I defined a measurement method for the determination of the arching properties of granular materials. With the modification of the triaxial apparatus, I made it possible to take into account the mechanical impact of the neighboring material during the measurement of the mechanical and failure properties of the sample.

I. Using measurements and numerical simulations I proved that the homogenous, isotropic material model is capable to model the arching action in granular assemblies.

II. Solving the differential equations describing the mechanical phenomena, and carrying out measurements I proved, that the necessary condition for the arch formation in granular assemblies is to have positive eigenvalues over the open outlet in the stress tensor field arising in the assembly because of the load.

III. With the use of numerical simulations I determined the arching process in flat bottomed bins.

IV. Using measurements and solving the differential equations describing the mechanical phenomenon I proved, that the necessary condition of the arch formation in hoppers is that the σ_K critical biaxial compressing stress evaluated at the transition zone from σ_3 maximal pre-compressing stress must be higher, than the minimal third main stress evaluated at the hopper vall.

V. With the use of numerical simulations, I determined the arching process at the hopper.

VI. Using measurements I proved, that the shape of arches can be approximated with parabola.

VII. With the use of numerical simulations I proved, that the stability of arches can be characterized using the value of specific deformation energy accumulated at the arch basement.

VIII. Using measurements and numerical simulations I proved, that the necessary condition of arch collapse (in case of flat bottomed bins and also in case of hoppers) is that the smallest eigenvalue of the stress field at the arch basement have to overrun a critical value, which value can be evaluated with measurements.

IX. I developed a measurement method for the evaluation of the critical compressing stress belonging to biaxial stress state with triaxial apparatus.

Irodalom

[1] **H. G. B. Allersma**: *Optical analysis of stress and strain in photoelastic assemblies*, Mechanics of Granular Materials, A. A. Balkema, Rotterdam (1999) pp. 265-270.

[2] **Ayuga F., Aguado P., Couto A., Guaita M.**: *Prediction of Silo Wall Pressures During Discharge Using Finite Element Models in Mass Flow and Funnel Flow*, www.ce.utexas.edu/em2000/papers/FAyuga.pdf.

[3] **Albert-László Barabási, Réka Albert, Peter Schiffer**: *The physics of sand castles: maximum angle of stability in wet and dry granular media*, Physica A 266, Elsevier, (1999) pp. 366–371.

[4] **Bagi Katalin**: *Szemcsehalmazok modellezése klasszikus kontinuumként: problémák és elentmondások*, Szemcsés anyagok mikromechanikája (2000. május 31 – június 2. Mátraháza), az előadások kivonatai, pp. 21–24.

[5] **Balássy Zoltán**: *Algoritmus és berendezés a szemes, szemcsés mezőgazdasági anyaghalmazok mechanikai jelemzőinek meghatározására*, Kandidátusi értekezés (kézirat) Gödöllő 1993.

[6] **Balássy Z., Huszár I., M. Csizmadia B.**: *Determination of Poisson's ratio in elastic oedometer*, 4th ICPPAM Int. Conf., Rostock, 1989, Proceeding, Volume 1, p. 26–30.

[7] **Csapó Gyula, Szabó Béla**: *Oldalnyomás mérése silóban*, OTKA-T-5138 Zárójelentés, 9. függelék, (1992-95), Gödöllő.

[8] **Csizmadia Béla**: *Differential Equation of Silo Problem*, kézirat.

[9] **A. Drescher, A.J. Waters, C. A. Rhoades**: *Arching in Hoppers I-II.*, Powder Technology, 84, (1995), pp. 165–183.

[10] **G. Enstad**: *On the Theory of Arching in Mass Flow Hoppers*, Chemical Engineering Science, 30, (1975), pp. 1273–1283.

[11] **Denis Feinstein, Jan Willem van de Meent, Martin Hecke**: *Universal and Wide Shear Zones in Granular Bulk Flow*, Physical Review Letters, Vol. 92, No. 9, pp. 94301-1 – 94301-4.

[12] **P. G. de Gennes**: *Granular Matter: A tentative view*, Reviews of Modern Physics, Vol. 71, No. 2, Centenary (1999) pp. 5374–5382.

[13] **K. P. Hadeler, C. Kuttler**: *Granular Matter in a silo*, Granular Matter 3, Springer–Verlag (2001) pp. 193–197.

[14] **Thomac C. Halsey**: *How Sandcastles Fall*, Physical Review Letters, 80, No. 14, (1998) pp. 3141–3144.

[15] **Y. L. Hua, Y. T. Feng**: *Wall pressure analysis of two–dimension shallow bins with top piles*, Powder Technology, 86, (1996), 257–264.

[16] **Huszár I., M. Csizmadia B.**: *Biotechnológiai folyamatok létesítéséhez és gépesítéséhez szükséges, a folyamatban résztvevő anyagok mechanikai tulajdonságainak vizsgálata*, OTKA 881 kutatási megbízás zárójelentése, GATE MGK Mechanika és Műszaki Ábrázolás Tanszék, 1990.

[17] **Huszár I., Csorba L.**: *Alkalmazott kőzetmechanikai kutatások, vizsgálati jelentés II. rész*, Agrártudományi Egyetem Mezőgazdasági Gépészmérnöki Kar, Mechanika Tanszék, 1985.

[18] **Janssen H. A.**: *Getreidedruck in Silozellen*, Z. Ver. Dt. Ing., 39, (1895), pp. 1045–1049.

[19] **A. W. Jenike**: *Steady Gravity Flow of Frictional–Cohesive Solids in Converging Channels*, Journal of Applied Mechanics, (1964), pp. 5–11.

[20] **A. W. Jenike**: *Storage and flow of solids*, Utah Univ. Eng. Exp. Stn., Bull. 123 (1964).

[21] **Shan Jing, Hongzhong Li**: *An experimental study on the mechanics of arching in hoppers connected to a moving bed with negative pressure gradient*, Powder Technology, 95, (1998), pp. 143–151.

[22] **T. Karlsson, M. Kisinski, K. Runesson**: *Finite element simulation of granular material flow in plane silos with complicated geometry*, Powder Technology, 99, (1998), pp. 29–39.

[23] **Kézdi Árpád**: *Talajmechanika I.-II.*, Tankönyvkiadó, Budapest (1972).

[24] **Kozák Imre**: *Kontinuummechanika*, Miskolci Egyetemi Kiadó, (1995).

[25] **P. L. L. van Leeuwenstijn et. al.**: *Investigation of the influence of wall stiffness on the stress ratio in mammoth silos*, Powder Technology, 78, (1994), pp. 213–220.

[26] **Kurt Liffmann, Myhuong Nguyen et. al.**: *Forces in piles of granular material. an analytic and 3D DEM study*, Granular Matter 3, Springer–Verlag (2001), pp. 165–176.

[27] **Kurt Liffmann**: *On the stress depression under a sandpile*, Powder Technology, 78, (1994), pp. 263–271.

[28] **S. Luding**: *Stress distribution in static two-dimensional granular model media in the absence of friction*, Physical Review E, 55, No. 4, (1997), pp. 4720–4729.

[29] **Hans–Georg Matuttis, Alexander Schinner**: *Influence of the geometry on the pressure distribution of granular heaps*, Granular Matter 1, Springer–Verlag (1999), pp. 195–201.

[30] **Mészöly Tamás**: *Silóvizsgálat mikroszerkezeti modell segítségével*, Szemcsés anyagok mikromechanikája (2000. május 31 – június 2. Mátraháza), az előadások kivonatai, pp. 43–50.

[31] **N. I.Muskhelishvili**: *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*, Nordoff, Groeningen, 1953.

[32] **Nagy Károly**: *Elméleti Mechanika*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1989.

[33] **K. Ono, M. Yamada**: *Analaysis of the arching action in granular mass*, Geotechnique, 43, No. 1, (1993), pp. 105–120.

[34] **M. Oda, K. Iwashita**: *Mechanics of granular materials*, A. A. Balkema, Rotterdam, 1999.

[35] **R. Peralta–Fabi, C. Málaga, R. Rechtmann**: *Arching in confined dry materials*, Europhysics Letters, 45, (1999) pp. 76–82.

[36] **E. Bruce Pitman**: *Forces on bins : The effect of random friction*, Physical Review Letters E, 57, No. 3, (1998), pp. 3170–3175.

[37] **Pusztai József, Rémai Zsolt**: *Geotechnika segédlet I. (Talajmechanika)*, http://www.gtt.bme.hu/talajmechanika.zip

[38] **Dietmar Shulze**: *Stresses in Silos*, www.zylosoft.com.

[39] **Sitkei György**: *Mezőgazdasági anyagok mechanikája*, Akadémiai Kiadó, Budapest 1981.

[40] **Stroppel, A.**: *Spannungszustände in lagernden körnigen Haufwerken in der Nähe einer ebenen Wand*, VDI-Forschungsheft, 525, VDI-Verlag, Düsseldorf (1968)

[41] **Szeidl György**: *Kontinuummechanika doktorandusz hallgatóknak*, Kézirat, 2005.

[42] **Y. Tanaka**: *Use of acoustic emission to detect yield point*, Mechanics of Granular Materials, A. A. Balkema, Rotterdam (1999) pp. 270-276.

[43] **Gabriel I. Tardos**: *A fluid mechanistic approach to slow, frictional flow of powders*, Powder Technology, 92, (1997), pp. 61–74.

[44] **Gabriel I. Tardos**: *Stresses in Bins and Hoppers*, www.erpt.org/992Q/ tard-00.htm.

[45] **L. Vanel, Ph. Claudin et. al.**: *Stresses in silos : Comparison between theoretical models and new experiments*, Physical Review Letters, 84, No. 7, (2000), pp. 1439–1442.

[46] **A. Verruijt**: *A complex variable solution for a deforming circular tunnel in an elastic half plane*, Int. J. Numer. and Anal. Methods in Geomechanics, 21, 77-89, 1997.

[47] **Walker D. M.**: Powder Technology (1967) pp. 228.

[48] **J. P. Wittmer, M. E. Cates, P. Claudin**: *Stress propagation and stresses in static sandpiles*, J. Phys. I France 7, (1997), pp. 30–80.

[49] **A. Couto Yáñez, M. Guaita Fernández et. al.**: *Finite element methods for analysis of static pressure distributions in grain silos with eccentric outlets*, European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering ECCOMAS 2000, Barcelona, 11-14 September 2000.